Inocêncio Fernandes Balieiro Filho

# Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya

## Quatro episódios da história da Heurística

# Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya

INOCÊNCIO FERNANDES
BALIEIRO FILHO

# ARQUIMEDES, PAPPUS, DESCARTES E POLYA

## QUATRO EPISÓDIOS DA HISTÓRIA DA HEURÍSTICA

Direitos de publicação reservados à:
Fundação Editora da UNESP (FEU)
Praça da Sé, 108
01001-900 – São Paulo – SP
Tel.: (0xx11) 3242-7171
Fax: (0xx11) 3242-7172
www.editoraunesp.com.br
www.livrariaunesp.com.br
feu@editora.unesp.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Vagner Rodolfo CRB-8/9410

---

B186a

Balieiro Filho, Inocêncio Fernandes
Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya: quatro episódios da história da heurística / Inocêncio Fernandes Balieiro Filho. São Paulo: Editora Unesp Digital, 2017.

Inclui bibliografia e anexo.
ISBN: 978-85-9546-176-5 (eBook)

1. Matemática. 2. Heurística. I. Título.

2017-719 CDD 518.1
CDU 519.6

---

Índice para catálogo sistemático:

1. Matemática: Heurística 518.1
2. Matemática: Heurística 519.6

Este livro é publicado pelo projeto *Edição de Textos de Docentes e Pós-Graduados da Unesp* – Pró-Reitoria de Pós-Graduação da Unesp (PROPG) / Fundação Editora da Unesp (FEU)

Editora afiliada:

*Para minha querida mulher, Cristina, encantadora, Cris. Meu grande amor, mulher amorosa, companheira, incentivadora e amiga. E ao meu outro amor, meu querido filho, pequenininho, Thales.*

*O tempo passa? Não passa*
*O tempo passa? Não passa*
*no abismo do coração.*
*Lá dentro, perdura a graça*
*do amor, florindo em canção.*

*O tempo nos aproxima*
*cada vez mais, nos reduz*
*a um só verso e uma rima*
*de mãos e olhos, na luz.*

*Não há tempo consumido*
*nem tempo a economizar.*
*O tempo é todo vestido*
*de amor e tempo de amar.*

*O meu tempo e o teu, amada*
*transcendem qualquer medida.*
*Além do amor, não há nada,*
*amar é o sumo da vida.*

*São mitos de calendário*
*tanto o ontem como o agora,*
*e o teu aniversário*
*é um nascer toda hora.*

*E nosso amor, que brotou*
*do tempo, não tem idade,*
*pois só quem ama escutou*
*o apelo da eternidade.*

*Carlos Drummond de Andrade*

*Agradeço ao professor Irineu Bicudo, meu orientador e amigo, com quem tive a oportunidade de trabalhar, podendo conhecer uma pessoa de virtude e um pesquisador com conhecimento matemático, filológico, histórico e filosófico, que o faz um respeitado historiador da Matemática, em especial, da Matemática grega.*

# Sumário

# Apresentação

*Irineu Bicudo*

No distante ano de 1957, eu era aluno do Cursinho Anglo-Latino, em São Paulo. Ali, a disciplina Desenho Geométrico era lecionada pelo distinguido professor Antônio Marmo. Meticuloso em suas apresentações, costumava frisar, quase em todas elas, que, na busca da solução de uma questão, primeiro devia-se pensar e depois fazer as construções geométricas necessárias. Além disso, rotulava enfaticamente algumas dessas construções de "superimportantes", "ultraimportantes".

Assim, um dia, com a irreverência dos meus dezoito anos, escrevi e presenteei o professor com, mais ou menos, os seguintes versos jocosos, que pretendiam resumir-lhe as lições:

Todo problema é um fio emaranhado,
Cujas pontas, que estão no enunciado,
São "o que se sabe" e "o que se quer".
Sabendo-se o que se quer achar,
Sabe-se o que se deve procurar,
Para o problema logo resolver.
Porém o que é "super", "hiper", "ultraimportante"
Para em um problema ir-se adiante,
É ter sempre em mente a fórmula eficaz,
"Primeiro a gente pensa, depois faz"

A brincadeira de então faz-me hoje pensar que o professor Marmo, provavelmente sem o saber, era um discípulo do eminente matemático, e um dos pais da heurística moderna, George Polya.

O verbo grego *heurísko* significa "encontrar, descobrir, inventar". Dentre seus derivados, destaco *hêuresis*, "invenção", e o substantivo de agente *heuretés*, "que descobre, inventa". Formada, de algum modo, valendo-se desse verbo, a palavra "heurística" tem por acepções "arte de inventar, de fazer descoberta", "método de orientar o pensamento para a resolução de um dado problema". É nesses sentidos que este livro aborda, pelo espaço de dois milênios, os passos de quatro gigantes pilares de tal arte: Arquimedes, Pappus, Descartes, Polya.

Além da análise minuciosa da contribuição de cada um deles para a heurística, encontrar-se-á aqui a primeira tentativa (bem-sucedida) de traduzir para o português, feita pelo professor Inocêncio, a partir do texto grego, a obra denominada *O Método,* de Arquimedes, por certo o mais antigo tratado da arte da descoberta que chegou até nós. Não fosse o valor do restante, só tal fato bastaria para merecer o interesse do público leitor.

# Introdução

A Matemática é considerada uma das mais antigas ciências. Desde tempos remotos, o conhecimento matemático vem sendo desenvolvido por diferentes povos, ainda que mediante formas diversas e tomando rumos distintos.

No entanto, a Educação Matemática, como área do conhecimento, surge somente no final do século XIX, com base nas discussões de matemáticos preocupados em tornar acessível o conhecimento da Matemática.

Ainda que a Educação Matemática possa ser considerada recente, questões e preocupações sobre "como aprendemos matemática" são antigas e parecem surgir ligadas ao desenvolvimento da Matemática.

Com o desenvolvimento da Educação Matemática, foram sendo delineadas linhas de pesquisa, dentre elas a *resolução de problemas*, que passou a ser vista como campo de pesquisa em Educação Matemática sob a influência de George Polya, nos Estados Unidos nos anos 1960 e mundialmente na década de 1970 (Onuchic, 1999).

Em 1980, foi editado nos Estados Unidos o documento *An Agenda for Action* pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), que enfatizava o uso da resolução de problemas como metodologia para o ensino da Matemática. As ideias veiculadas nesse documento influenciaram reformas mundiais e algumas propostas

elaboradas no Brasil, como a Proposta Curricular para o Ensino de Matemática do Estado de São Paulo (1986) e os *Parâmetros Curriculares Nacionais* – Matemática para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998) e Ensino Médio (idem, 2002). Dessa forma, as pesquisas realizadas sobre resolução de problemas passam a discutir sua aplicação como metodologia de ensino da Matemática.

As políticas públicas educacionais e as pesquisas publicadas, em nível nacional, a partir dos anos 1990, passaram a enfatizar uma aprendizagem da Matemática de forma contextualizada, por meio de um trabalho com atividades que possibilitem ao aluno o desenvolvimento da capacidade de interpretar e compreender situações, "para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação" (ibidem, p.111).

Nessa perspectiva, a resolução de problemas passou a ser indicada como metodologia de ensino adequada para proporcionar ao aluno a oportunidade de pensar por si mesmo, construir estratégias de resolução e argumentações, relacionar diferentes conhecimentos e, enfim, perseverar na busca da solução de um problema (ibidem).

No entanto, para Polya, uma das questões fundamentais é "como pensamos", ou seja, quais processos cognitivos estão envolvidos no raciocínio utilizado na resolução de problemas:

> Para Polya (1965), "resolver problemas" era o tema mais importante para se fazer matemática, e "ensinar o aluno a pensar" era sua importância primeira. Um tema que fundamenta a investigação e a resolução de problemas em matemática é "como pensar". (Onuchic, 1999, p.210)

Os estudos estabelecidos por Polya, relacionados ao "como pensar" para resolver um problema, têm como eixo central a discussão de processos mentais envolvidos no raciocínio heurístico.

Por consequência, considerando as questões que fundamentam a linha de pesquisa *resolução de problemas,* é possível afirmar que tais indagações aparecem em obras das que se têm registros históricos, de autores muito mais antigos. Assim, vestígios de heurística são

encontrados em obras de Arquimedes, Pappus, Descartes, Arnauld, Leibniz, Bolzano, Loria etc.

Neste livro, temos como objetivo analisar e discutir indícios heurísticos presentes nas obras *O método* de Arquimedes (*La Méthode*, 1971), *A coleção matemática* de Pappus (*La Collection Mathématique,* 1982) e *Regras para a direção do espírito* de Descartes (*Règles Pour La Direction De L'esprit*, 1908.), buscando estabelecer relações com a sistematização da atividade heurística apresentada nas obras de Polya *A arte de resolver problemas* (1994) e *Matemática e raciocínio plausível* (*Mathematics and Plausible Reasoning*, 1973a).

Dentro de uma metodologia de pesquisa em História da Matemática, foi consultado o original da obra de Arquimedes e traduções das demais obras citadas, procedendo-se do seguinte modo:

- Diante das pesquisas realizadas, é possível afirmar que *O método* é a mais antiga obra de heurística de que se tem conhecimento. Tal escrito desperta certa curiosidade do ponto de vista heurístico, tornando-se notável pelo aspecto científico e fascinante como documento histórico. Assim, neste livro está a primeira tradução desse texto de Arquimedes do original em grego clássico para o português.
- Quanto à *Coleção matemática,* foi utilizada a tradução feita pelo professor Irineu Bicudo de um trecho do Livro VII, do texto original em grego clássico para o português, em que Pappus aborda e conceitua os aspectos referentes à análise e síntese, que fornecem subsídios à atividade heurística.
- Foi realizada uma tradução do texto em francês para o português de *Regras para a direção do espírito*, de Descartes. O texto em língua francesa é uma tradução do original em latim feita por J. Sirven.

Ainda que vestígios heurísticos sejam encontrados em obras de outros grandes matemáticos e filósofos, esta pesquisa foca os autores citados primeiramente por considerar que são, cronologicamente, os primeiros que de algum modo traduziram em suas obras suas

preocupações referentes a aspectos envolvidos na atividade heurística; em segundo lugar, pelas limitações impostas pelo tempo e pelo esmero exigido numa investigação em História da Matemática que é baseada em textos originais.

Segundo Leibniz (apud Polya, 1994, p.96), "nada é mais importante do que observar as origens da invenção, as quais são, na minha opinião, mais interessantes que as próprias invenções". Desse modo, uma das relevâncias que se pode mencionar desta pesquisa é o fato de referir-se aos aspectos que permeiam a invenção, a descoberta, buscando discutir "como pensaram" Arquimedes, Pappus e Descartes para resolver problemas de Matemática segundo os registros por eles deixados sobre o raciocínio heurístico que utilizavam, revelando, dessa forma, uma preocupação em esclarecer os processos que empregavam com sucesso na construção do conhecimento matemático.

Assim, o livro foi organizado da seguinte maneira: no primeiro capítulo discute-se a origem e o significado do termo "heurística". A metodologia de pesquisa em História da Matemática utilizada no desenvolvimento desta obra é apresentada no segundo capítulo.

Antes de aplicar o método de exaustação, que é um método de demonstração rigorosa, Arquimedes, para descobrir a solução de uma proposição, utiliza um método heurístico mecânico. Assim, no terceiro capítulo, discutem-se as origens da atividade heurística encontradas em *O método*.

O quarto capítulo trata da investigação do Livro VII de *A coleção matemática* de Pappus, discutindo os aspectos referentes à análise e síntese que aparecem em um trecho do texto. No quinto capítulo é feita a análise da obra *Regras para a direção do espírito*, com a qual Descartes estabeleceu um método para que, diante de um problema, fosse possível encontrar a solução.

Uma comparação entre a sistematização da atividade heurística apresentada nas obras *A arte de resolver problemas* e *Matemática e raciocínio plausível* de Polya e os aspectos heurísticos evidenciados nas obras de Arquimedes, Pappus e Descartes é feita no sexto capítulo.

No anexo encontra-se a tradução de *O método* de Arquimedes do grego clássico para o português.

# 1
# Heurística: origem e significado

Como atesta a história, o homem desde eras remotas é levado a resolver seus problemas, e o progresso da humanidade pode ser atribuído a essa capacidade de resolver problemas de situações diárias. Muitas vezes, em tais situações, a solução não é imediata.

Concordamos com o pressuposto "todos têm problemas": todos os seres humanos têm problemas relacionados com sua vida pessoal ou profissional, de caráter prático ou teórico, de categorias variadas, tais como problemas econômicos, sociais, biológicos, psicológicos, políticos, científicos, filosóficos, artísticos etc., e na tentativa de solucionar esses problemas práticos ou teóricos, mesmo tendo o homem uma gama de experiências, muitas vezes ele é malsucedido. Então, num processo psíquico, cria, elabora, descobre um método que até então era desconhecido, útil à resolução do problema; a esse esquema psíquico dá-se o nome de atividade heurística, conforme salienta Puchkin (1976, p.8):

> Acontece que, na vida quotidiana, não apenas em casos idênticos aos citados, mas também noutros mais simples, frequentemente surgem diante do homem situações que geram conflitos entre as circunstâncias e as exigências do exercício de uma atividade. Precisa o homem executar uma série de ações e solucionar este ou aquele

> problema. Contudo, as condições reinantes não lhe propiciam meios para solucionar esses problemas. E mesmo todo o seu arsenal de experiências passadas não lhe apresenta qualquer esquema completo adequado às condições emergentes. A fim de descobrir uma saída para a situação, deve o homem criar uma nova estratégia de ação, isto é, concretizar um ato de criação. Contingência como esta é, normalmente, denominada um problema ou uma situação problemática, ao passo que o processo psíquico que, ao auxiliar sua solução elabora uma nova estratégia que se mostra como algo inédito é designado como pensamento criador ou, para usarmos terminologia que nos vem de Arquimedes, atividade heurística.

Convém relembrar, como diz Puchkin, que o termo heurístico é de origem grega, cujo sentido é "encontrar, descobrir, inventar", expresso pelo verbo grego εὕρισκω, com derivados como o adjetivo verbal εὑρετός, que se pode "encontrar ou inventar", e εὑρετικός, "inventivo, engenhoso". Heurística, que o dicionário português diz ser "um conjunto de regras e métodos que conduzem à descoberta, à invenção e à resolução de problemas" (Ferreira, 1997, p.891), vem da expressão grega εὑριστικὴ τεχνή, isto é, a arte relativa à descoberta, à invenção, sobre a qual secencontram vestígios no tratado *O método* de Arquimedes.

Feitas as considerações com relação ao processo da atividade heurística, justifica-se a inserção da pesquisa apresentada neste livro na área da Educação Matemática, em razão da contribuição das discussões realizadas para o ensino de Matemática e para a filosofia da Educação Matemática. Como salienta Polya (1957, p.129-30),

> a Heurística moderna esforça-se por compreender o processo de resolução de problemas, especialmente as operações mentais tipicamente úteis nesse processo. Dispõe de várias fontes de informação, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo sério da heurística deve levar em conta tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas, não deveria negligenciar aquilo que autores antigos como Pappus, Descartes, Leibnitz e Bolzano disseram sobre o assunto,

mas muito menos deveria negligenciar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros devem ser a base sobre a qual heurística é construída. Nesse estudo, não deveríamos descurar de nenhum tipo de problema, e deveríamos buscar os aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda a sorte: deveríamos visar aos aspectos gerais, independentemente do assunto do problema. O estudo da heurística tem objetivos "práticos": uma melhor compreensão das operações mentais tipicamente úteis na resolução de problemas poderia exercer uma influência benéfica sobre o ensino, especialmente sobre o ensino da Matemática.

# 2
# Metodologia de pesquisa em História da Matemática

Neste capítulo será explicitada e discutida uma metodologia de pesquisa em História da Matemática. Em alguns trabalhos da área encontra-se a preocupação em discutir processos de historiografia; no entanto, enfatiza-se aqui a necessidade da discussão e da construção de uma metodologia que possa auxiliar o pesquisador no direcionamento dos seus estudos, possibilitando limitar seu foco de interesse.

Para a elaboração da metodologia que será exposta neste capítulo, tomaram-se como base os processos metodológicos discutidos em Bervian e Cervo (1983), as etapas de pesquisa em História sugeridas por Besselaar (1973) e os critérios para classificação das fontes históricas indicados por May (1978). Dadas essas referências, buscou-se adaptá-las às características da pesquisa em História da Matemática, particularmente às deste livro.

Por questões de apresentação e descrição, a metodologia proposta e empregada aqui foi dividida em sete etapas. No entanto, ela é entendida como um processo que ocorre ao longo da elaboração da pesquisa; dessa forma, em alguns momentos, as fases descritas não apresentam uma continuidade, ao passo que em outros são desenvolvidas em conjunto.

## Levantamento bibliográfico

Tendo-se estabelecido o tema da pesquisa, a primeira etapa é o levantamento bibliográfico com o intuito de encontrar os livros, artigos e outros documentos que estejam relacionados com o assunto da pesquisa.

A pesquisa bibliográfica referente ao tema estabelecido foi feita em bibliotecas e teve como objetivo encontrar as obras de cada matemático ou filósofo que no transcorrer da história, desde Arquimedes, passando por Pappus e Descartes até Polya, registrou em suas obras vestígios concernentes, implícita ou explicitamente, à heurística. O levantamento bibliográfico foi realizado ao longo de toda a investigação, já que os textos dos autores citados indicaram novas fontes a consultar posteriormente.

## Documentação

Quanto à sua natureza, devem-se distinguir dois tipos de documentos cujo valor é desigual nesta pesquisa histórica: fontes primárias e secundárias. No primeiro tipo de fontes há os textos originais que cada autor escreveu e que fazem parte da matéria-prima da investigação histórica; as fontes secundárias são as enciclopédias, revistas, dicionários especializados etc. que tratam das informações gerais do assunto pesquisado.

Desse modo, as fontes primárias utilizadas aqui são *O método*, de Arquimedes, *A coleção matemática*, de Pappus, e *Matemática e raciocínio plausível*, de Polya. Os textos *Regras para a direção do espírito*, de Descartes, e *A arte de resolver problemas*, de Polya, constituem fontes secundárias; do primeiro utilizou-se uma tradução do latim para o francês e do segundo uma tradução do inglês para o português.

## Leitura de reconhecimento

É feita com a finalidade de coleta de dados que serão utilizados na pesquisa histórica. A fase inicial dessa leitura informativa é feita com o intuito de verificar ou não verificar a existência das informações que o pesquisador procura, além de proporcionar uma visão global dessas informações. As finalidades dessa leitura são, em primeiro lugar, permitir a seleção de documentos bibliográficos que contêm informações suscetíveis de serem aproveitadas na investigação histórica e, em segundo lugar, contribuir para uma visão global do assunto focalizado.

No caso deste livro, levando-se em conta os autores considerados no levantamento bibliográfico, foram selecionadas as obras que tratam de aspectos da atividade heurística. Desse modo, foram selecionadas as obras citadas na segunda etapa (documentação) da metodologia de pesquisa.

## Leitura seletiva

Feita a leitura de reconhecimento, ou seja, localizadas as informações, procede-se à escolha, no texto, do assunto propício, em conformidade com os propósitos da inquirição histórica. Assim, o pesquisador faz sua seleção, tendo como intuito a exclusão do que não é essencial, com o propósito de prender-se ao que, de fato, é primordial para a pesquisa histórica, tendo em vista o que foi estabelecido na pergunta diretriz dessa pesquisa e o que se pretende examinar. Desse modo, obtêm-se respostas que possam fornecer subsídios, que constituirão um pré-panorama do tema da investigação histórica proposta.

O texto *O método* de Arquimedes foi selecionado, já que no prefácio dessa obra fica explícita sua preocupação em discutir o processo heurístico envolvido em seu método mecânico. No livro VII de *A coleção matemática* de Pappus, são abordados os conceitos de análise e síntese que fazem parte da atividade heurística; desse modo, tal

texto serve ao propósito deste livro. Em *Regras para a direção do espírito* de Descartes, são abordados alguns elementos referentes à atividade heurística, como intuição, analogia, inferência e indução, justificando a seleção dessa obra.

A possibilidade de retornar ao mesmo texto outras vezes caracteriza a fase seguinte do exame histórico.

## Leitura reflexiva

Concluída a fase seletiva do material documental profícuo à pesquisa histórica, ingressa-se no estudo propriamente citado dos textos selecionados, com o intuito de saber o que o autor assevera sobre o assunto. Como se salientou nas fases antecedentes, parte-se de uma visão global, embora indeterminada, do texto para a operação da análise. Essa envolve os processos de diferenciação das ideias diretrizes, das ideias secundárias e seus pormenores; de compreensão das ideias; de julgamentos das ideias; da utilidade e importância que possuem. Os critérios de julgamento citados serão os propósitos da pesquisa história: assim, as ideias terão valor e serão úteis se interessarem à investigação histórica.

As análises dos documentos textuais desdobram-se, portanto, em certo número de operações:

1. identificam-se e escolhem-se a ideia diretriz (isto é, aquela que está relacionadas com o objetivo da pesquisa; neste caso, vestígios de atividade heurística) e as ideias secundárias;
2. diferenciam-se ou comparam-se as ideias entre si, a fim de determinar a importância relativa de cada uma no conjunto das ideias;
3. tenta-se compreender o significado exato, nos textos, do que se busca na pesquisa histórica;
4. julga-se o material documental, após escolher, diferenciar e compreender. Tal apreciação das informações fornecidas pela análise corresponde a uma fase decisiva da pesquisa histórica e é feita mediante a leitura interpretativa, na fase seguinte.

Ao pesquisar, o historiador deve estar ciente de que é preciso estabelecer certas posturas como o culto desinteressado da verdade e a ausência de preconceitos diante dos textos. Nessa fase da pesquisa histórica tem-se um triplo decurso – i) processo de aprendizagem: reflexão ponderada e consciente; ii) processo de apreensão: percepção dos significados, que envolve um esforço reflexivo das operações de análises, comparações, diferenciações, sínteses e julgamentos; iii) processo de assimilação: apropriação dos dados referentes ao assunto.

## Leitura interpretativa

É o último estágio da leitura de um texto e suas aplicações aos intentos particulares da pesquisa histórica. Nessa fase, faz-se um tríplice julgamento:

1. De acordo com a investigação histórica, partindo-se dos objetivos do autor e do tema do texto, procura-se saber o que o autor realmente declara, quais os indícios e as informações que o texto pretende transmitir. Assim, faz-se uma crítica textual objetiva, importante para a procura histórica, já que se veda a introdução, na pesquisa histórica, de considerações não fundamentadas, em particular sobre as confirmações textuais.
2. Na segunda etapa dessa leitura interpretativa, relaciona-se o que o autor expõe no texto com o que pretende a inquirição histórica. Desse modo, o julgamento do valor, que agora se faz em virtude das deliberações da pesquisa histórica, utiliza esses pareceres na construção e delineamento do panorama histórico do tema proposto.
3. Na terceira etapa, julga-se o material documental coletado em conformidade com o emprego do juízo de verdade (a evidência objetiva), ou melhor, são as verdades que se apresentam de forma tão perceptível e patente que compelem o pesquisador a uma segura anuência a respeito do assunto investigado.

Concluída a análise e o julgamento, procede-se à elaboração e reunião das informações obtidas por meio da inquirição histórica, num conjunto organizado cronologicamente.

## Redação da pesquisa

Nessa fase, elabora-se o relato e a apresentação dos resultados da pesquisa histórica, focados numa exposição mentalmente estruturada, isto é, dispondo harmoniosamente as partes que compõem a investigação histórica, diferenciando as ideias importantes das secundárias e instituindo, sequencialmente, os encadeamentos e associações naturais do tema central apresentado.

# 3
# A origem da heurística em O *método* de Arquimedes

> *A lógica e a intuição têm cada uma seu papel necessário. Ambas são indispensáveis. A lógica, a única que pode dar a certeza, é o instrumento da demonstração; a intuição é o instrumento da invenção.*
>
> Poincaré, *O valor da Ciência,* 1905

A atividade do homem antigo, quer considerada do ponto de vista individual, quer do ponto de vista social, começou a exigir um conhecimento tão completo quanto possível do seu *habitat*. Assim, a história revela que algumas das civilizações antigas (egípcia e babilônica) tiveram que desenvolver, para suas necessidades de vida diária, processos de cálculos e medidas, mas apenas os gregos, a partir do século VI a.C., pensaram em analisar os encadeamentos lógicos de tais processos e criaram assim um modo de pensar completamente novo. Segundo Heath (apud Karlson, 1961, p.81-2), historiador da matemática grega, essa singular realização dos gregos ou sua aptidão específica tem razões:

> Em primeiro lugar, amavam o saber pelo próprio saber, desinteressadamente, amor que se transformou em instinto e até mesmo em paixão; segundo, tinham amor à verdade e suficiente determinação

para verem as coisas como realmente elas são; terceiro, caracterizava-os uma notável capacidade de observação. Ao passo que colhiam informações, com grande afã, especialmente em todos os recantos do Egito e da Babilônia, tinham – em quarto lugar – um instinto infalível, que fazia com que aceitassem tudo que era digno de ser possuído, rejeitando o resto. Sua glória imperecível consiste no fato de haverem descoberto e aplicado os elementos científicos realmente sérios, dentro da massa múltipla e confusa de estudos exatos e de concepções supersticiosas, que eram os constituintes da ciência sacerdotal do Oriente pondo de lado todos os disparates fantásticos. Em quinto lugar, possuíam um gênio pesquisador que não tem paralelo na história universal.

Desse modo, para um melhor entendimento quando for abordada a origem da atividade heurística em Arquimedes, convém explicitar, primeiramente, as fontes primárias que deram início às ideias de demonstrações entre os gregos.

> Ocupo-me [...] das matemáticas, não por si mesmas, mas em relação à filosofia grega – relação essa que, notadamente em Platão, era muito estreita. A preeminência dos gregos aparece com mais nitidez nas matemáticas e na astronomia do que em qualquer outra coisa. O que fizeram na arte, na literatura e na filosofia, pode julgar-se melhor ou pior segundo os gostos, mas o que realizaram na geometria está inteiramente acima de qualquer questão. Aprenderam alguma coisa do Egito e um pouco menos da Babilônia; mas o que obtiveram dessas fontes foi, nas matemáticas, em particular regras rudimentares e, na astronomia, registros de observações que se estendiam sobre períodos muitos longos. A arte da demonstração matemática foi, quase inteiramente, de origem grega. (Russell, 1969, p.242)

O desenvolvimento das primeiras formas de argumentação é proposto por partidários de duas matrizes que contribuíram para o progresso do pensamento lógico-formal, isto é, os partidários da matriz que tem características dialéticas e os partidários da matriz

que tem características matemáticas. No caso dos partidários da primeira matriz, a gestação das primeiras formas de argumentações dedutivas que surgiram nos séculos VI e V a.C. na antiga Grécia sofreu influência do meio sociopolítico, cultural e religioso. Essa influência pode ser notada nas concepções filosóficas estabelecidas pelos filósofos da chamada Escola Jônica, cujo primeiro componente é Tales de Mileto[1] (624-546 a.C.). Assim como os demais membros dessa escola – Anaximandro (610-546 a.C.) e Anaxímenes (570-500 a.C.) –, Tales foi um filósofo da natureza que por meio de observações empíricas sobre os seres e os fenômenos, especialmente os meteorológicos, chegou à concepção de que todo o universo estava submetido a um processo e uma transformação contínua, e conjecturou: "a água é o princípio de todas as coisas, porque tudo provém da água e tudo se reduz a ela". Assim, com essa nova atitude do homem perante as questões impostas pelo universo, que é a filosofia, surge também um novo tipo de homem, o filósofo, que se contrapõe ao homem sacerdote que buscava exclusivamente o poder, a riqueza, as honras e o interesse na possível vida após a morte.

O pensamento filosófico jônico tinha íntima conexão com o problema cosmológico, ao passo que na Escola Pitagórica, fundada por Pitágoras de Samos[2] (582-497 a.C.), o pensamento filosófico adquire outra característica: uma preocupação em estudar a essência das coisas, os primeiros princípios e a causa do que existe, ou seja, os problemas metafísicos.

> A metafísica, ou a tentativa de conceber o mundo como um todo por meio do pensamento, desenvolveu-se desde o início, pela união e pelo conflito de dois impulsos humanos bem distintos: um induzindo os homens ao misticismo, outro à ciência. (Russell, 1977, p.9)

Convém ressaltar que, segundo Russell (ibidem, p.41),

1 Mileto era uma das maiores cidades helênicas da Ásia Menor, pertencente ao território da Cária.

2 Uma das principais ilhas gregas do Mar Egeu, hoje Samos.

> a maior parte das ciências, esteve ligada, a princípio, a alguma forma de crença, falsa, que lhes dava um valor fictício. A astronomia achava-se ligada à astrologia, a química à alquimia. As matemáticas achavam-se associadas a um tipo mais refinado de erro. O conhecimento matemático parecia ser certo, exato, e aplicável ao mundo real; ademais, podia ser adquirido por meio de simples raciocínio, sem necessidade de observação. Por conseguinte, acreditava-se que proporcionava um ideal, do qual o conhecimento empírico cotidiano ficava muito longe. Supunha-se, com base na matemática, que o pensamento é superior aos sentidos, e a intuição, à observação. Se o mundo dos sentidos não se ajusta às matemáticas, tanto pior para o mundo dos sentidos. Procuraram-se, de várias maneiras, métodos que permitissem ao homem aproximar-se do ideal do matemático, e as sugestões que daí resultavam foram a fonte de muitos erros na metafísica e na teoria do conhecimento. Esta forma de filosofia começa com Pitágoras.

Em vista do pensamento jônico, o pitagorismo apresenta uma nova e original característica em relação à natureza especial do elemento primordial como princípio de todas as coisas, uma vez que esse elemento primordial é agora o número, isto é, a onipotência e onipresença do número em todas as coisas que compõem o cosmo. Desse modo, como todos sabem, Pitágoras afirmou que *todas as coisas são números*. Mas conforme a análise de Russell (1969, p.41),

> esta afirmação, interpretada à maneira moderna, é logicamente um disparate, mas o que Pitágoras queria dizer não o era de todo. Descobriu ele a importância dos números na música, e a ligação por ele estabelecida entre a música e a aritmética sobrevive nos termos matemáticos "média harmônica" e "progressão harmônica". Imaginava os números como figuras tal como aparecem nos dados e nos baralhos. Ainda hoje falamos dos quadrados e dos cubos dos números, termos esses que devemos a Pitágoras. Também falamos de números oblongos, números triangulares, números piramidais, e assim por diante. Eram estes os números de seixos (ou, como diríamos

> com mais naturalidade, grãos de chumbo) necessários para fazer as formas em questão. Ele considerava o mundo, provavelmente, como atômico, e os corpos feitos de moléculas compostas de átomos dispostos de várias formas. Esperava, assim, fazer da aritmética o estudo fundamental para a física e a estética.

As doutrinas e concepções filosóficas pitagóricas conduziram os partidários a estudarem com exaltação as propriedades dos números, relacionadas com a aritmética, a geometria elementar plana e a espacial, a música e a astronomia; esses estudos constituíram um programa essencial para a formação dos discípulos dessa escola filosófica e, com Filolau de Crotona[3] (480-390 a.C.), foram divulgados para um maior número de adeptos, já que a escola pitagórica era uma espécie de irmandade secreta mística, política, científica e religiosa. Porém, antes disso, na primeira metade do século V a.C., houve o aparecimento de uma nova escola filosófica chamada Eleata, cujo fundador foi Parmênides de Eleia[4] (549-420 a.C.).

Com Parmênides, apresenta-se uma nova forma no pensamento reflexivo, isto é, a ação necessária da razão como processo dialético do pensar, surgindo como primeiro resultado dessa operação natural a distinção entre o que é a essência e o que é a forma das coisas. Diante desta realidade sensível que se percebe, com pequena diferença nas acepções e efêmera, existe uma realidade eterna, imutável e imóvel do ser. Portanto, o homem deve buscar esta realidade por detrás das aparências do mundo dos sentidos e discernir a verdade (o ser) da suposta opinião (o não ser). Ou como afirma Sciacca (1967, p.32):

> Vimos que os filósofos precedentes procuram um princípio eterno e universal do devir e da multiplicidade das coisas. Parmênides, pela primeira vez, formula este problema de modo crítico. Existem as coisas e um seu princípio tendo aqueles caracteres

---

3 Hoje Crotone, na Idade Média, Cotrone, uma das cidades mais poderosas da Magna Grécia, na costa oriental do Brútio (ou Brúcio, antiga região da Itália), fundada pelos Aqueus, em 710 a.C.

4 Região do Peloponeso, na Grécia.

opostos a este, resultando daí que o princípio tem uma essência que lhe é própria. Conclui ainda que as coisas não são no mesmo sentido que é o princípio; portanto, só o princípio é uno, eterno, imóvel; portanto, ainda, o princípio é o Ser e só o Ser pode ser princípio. Daí a afirmação parmenídea: só o Ser é. Por outro lado, pensar é pensar algo; não há pensamento sem um objeto do próprio pensamento, que não pode ter objeto exceto isso que é; portanto, o objeto do pensamento é o Ser e somente o conhecimento do Ser é conhecimento verdadeiro.

Pode-se dizer, conforme Russell, que sua doutrina foi exposta num poema intitulado "Da Natureza", escrito numa entonação profética e alegórica.[5] Parmênides não mostra os procedimentos para chegar à verdade, porém inicia uma forma de pensamento crítico com relação ao conhecimento vigente e introduz, na construção do conhecimento científico, um rigor lógico que não foi alcançado pelo empirismo jônico nem pelo misticismo pitagórico e que procura descobrir na capacidade racional do homem a qualidade que lhe possibilita ter conhecimento sobre a essência.

> As matemáticas, porém, sob a influência de Pitágoras, floresceram mais na Magna Grécia do que na Jônia; no entanto, os matemáticos, nessa época, emaranharam-se no misticismo. Parmênides foi influenciado por Pitágoras, mas a extensão dessa influência é conjetural. O que torna Parmênides historicamente importante é ter inventado uma forma de argumento metafísico que, desta ou daquela forma, é encontrado na maioria dos filósofos posteriores, incluindo Hegel. Dele, diz-se, com frequência, ter sido o inventor da lógica, mas o que realmente inventou foi a metafísica baseada na lógica. (Russell, 1969, p.56)

---

5 Na retórica, alegoria é espécie de metáfora continuada que exprime uma coisa diferente da que diretamente enuncia. Obra literária em que se representa um objeto para dar ideia de outro. O apólogo e a parábola são espécies de alegorias.

Desse modo, a escola eleata negava a validade dos sentidos como meio para alcançar a verdade. De acordo com esse preceito, os eleatas pretendem demonstrar que por intermédio da razão seriam capazes de provar que a mensagem dos sentidos deveria ser ignorada. Seguindo essa linha filosófica, um discípulo de Parmênides de Eleia que merece destaque é Zenão de Eleia (490-435 a.C.), que presenteou os pensadores com seus quatro clássicos argumentos contra o movimento(de Aquiles, da Dicotomia, da Flecha e do Estádio). Durante muito tempo esses argumentos foram considerados paradoxos, mas hoje são interpretados como críticas dirigidas às concepções pitagóricas para demostrar os absurdos que implicava a concepção dos corpos como soma de pontos, do tempo como soma de instantes e do movimento como soma de passagens de um lugar para outro. As críticas de Zenão, independentemente de seus objetivos, tiveram importantes consequências para o desenvolvimento ulterior da matemática grega. Além disso, pode-se citar como contribuições diretas de Zenão à matemática grega certos recursos de ordem lógica, metodológica e técnica. Assim, o processo dicotômico, frequente em suas críticas, foi utilizado por outros matemáticos como recurso de demonstração, e o método de redução ao absurdo, tão utilizado na matemática grega, é um resultado do princípio da não contradição, sustentáculo dos raciocínios desse filósofo eleata que o manejou com tanta habilidade que mereceu ser considerado por Aristóteles (384-322 a.C.) como o inventor da dialética.

> Um dos mais notáveis exemplos da falta de discernimento da posteridade é o de Zenão, o Eleata. Este homem, que pode ser considerado o fundador da filosofia da infinitude, aparece no diálogo Parmênides de Platão na posição privilegiada de mestre de Sócrates. Ele inventou quatro argumentos, todos incomensuravelmente sutis e profundos, para provar que o movimento é impossível, que Aquiles jamais poderá alcançar a tartaruga, e que uma flecha em voo está, na verdade, em repouso. Depois de refutados por Aristóteles, e por todos os filósofos subsequentes dessa época até a atual,

> esses argumentos foram restabelecidos e se tornaram a base de um renascimento matemático, levado a cabo por um professor alemão, que provavelmente jamais sonhou com qualquer ligação entre ele e Zenão. Weierstrass, banindo rigorosamente da matemática o uso dos infinitesimais, mostrou finalmente que vivemos num mundo imutável, e que a flecha em voo está verdadeiramente em repouso. (idem, 1977, p.89)

Durante o século VI a.C. surgem novas condições de vida nas colônias gregas da Ásia Menor devidas à revolução econômica, facilitadas pelas transações comerciais. Desse modo, houve um fortalecimento econômico e social daqueles que viviam do comércio, da navegação e do artesanato, marcando definitivamente a decadência da organização social fundamentada numa aristocracia hereditária e, consequentemente, alterando também o quadro econômico, político, social e cultural de Atenas. Assim, segundo Sciacca (1967, p.38), houve a necessidade de uma filosofia que caracterizasse os interesses dessa nova classe social:

> As condições alteradas de Atenas entre a segunda metade do século VI [a.C.] e o fim do século V [a.C.] (transformada em centro da cultura grega); a necessidade de uma filosofia mais aderente à vida concreta e mais interessada pelos problemas do homem que pelos problemas da natureza; a potência política após a vitória sobre os persas e a nova ordenação democrática contribuíram para determinar a passagem dos pré-sofistas aos sofistas. Mais que especular em torno da origem e do princípio primeiro do mundo, é o próprio mundo assim como ele é, como cada dia o vivemos na nossa vida de homens, que é colocado como problema. A vitória sobre os persas, o esplendor da vida política, as liberdades democráticas, a prosperidade econômica, o vínculo sempre mais estreito entre a cultura e política mudam a orientação da filosofia.

Essa nova vertente filosófica (filosofia sofística) contribuiu para que o homem fosse preparado para cuidar de si e progredir a todo

custo na comunidade. Assim, o ensino era planejado pelo sofista[6] cuidadosa e minuciosamente para que os jovens gregos aprendessem a usar argumentos lógicos que não pudessem ser destruídos, buscando despertar o sentido crítico da investigação contra todo dogmatismo. Pode-se conjeturar que essa forma de pensamento auxiliou de alguma maneira os métodos de demonstrações utilizados pelos geômetras gregos, visto que se conhecem na história da matemática grega pelo menos três geômetras considerados sofistas, conforme Michel (1950, p.182-3): Antifonte,[7] o sofista (480-411 a.C.), orador rival de Sócrates como educador da juventude ateniense, dedicou-se às diversas ciências, autor da obra *Sobre a verdade*. Como matemático, Antifonte é conhecido por suas pesquisas relativas à quadratura do círculo, isto é, inscrevendo progressivamente no círculo polígonos regulares de 4, 8, 16, 32 lados e assim por diante, e teria de chegar-se com esse progressivo duplicar a um ponto no qual, por sua pequenez, os lados do polígono se confundiriam com os arcos mínimos correspondentes, e o polígono esgotaria deste modo a superfície do círculo. Antifonte, segundo Michel (idem, p.215), é mencionado por Aristóteles (*Phys. I, 2, 185a*), Pseudo-Plutarco (*De placitis philosophorum*) e pelos comentadores de Aristóteles, Simplício e Temístio.

Ainda de acordo com Michel (ibidem, p.226-7), outro sofista é Brisão de Heracles ou Brisão o sofista (450-? a.C.), filho do historiador Heródoto de Heracles, não devendo ser confundido com Brisão filho de Estipão, um dos mestres de Pírron (*Diog. Laërce, XI, 61*), ou com Brisão de Acaia, mestre de Crates (*Diog. Laërce, VI, 85*), nem com o Brisão citado por Jâmblico (*Vita pyth., 104*) entre os discípulos imediatos de Pitágoras. Brisão também é conhecido por suas pesquisas relativas à quadratura do círculo, isto é, inscrevendo e circunscrevendo progressivamente no círculo polígonos regulares de 4, 8, 16, 32, ... , $2^k$, ... , ($k \geq 2$) lados, de tal forma que a diferença entre a

6 Segundo Russell, a palavra "sofista" não tinha, a princípio, sentido pejorativo; significava, bastante aproximadamente, o que hoje chamamos "professor".

7 Qualificado de "o sofista" para distinguir-se de seu contemporâneo Antifonte de Ramonte, orador e político ateniense.

área do polígono circunscrito (sempre maior do que a área do círculo) e a área do polígono inscrito (sempre menor do que a área do círculo) resulte mínima, isto é, aproxima-se cada vez mais de zero; e as áreas dos polígonos inscritos e circunscritos, cada vez mais, aproximam-se do valor da área do círculo.

Por fim, segundo Michel (ibidem, p.245-7), o sofista Hípias de Élis[8] (460-400 a.C.), filho de Diópite, originário de Élis, capital da Élide e não de Eleia com escreveram erradamente vários historiadores (entre outros, Ferdinand Hoefer, Gino Loria e Abel Rey), sofista contemporâneo de Protágoras e de Sócrates, imortalizado por dois diálogos de Platão que o descreve como um personagem vaidoso e com capacidade intelectual. O geômetra Hípias de Élis é conhecido pelo estudo da curva chamada quadratriz que foi utilizada na solução dos problemas clássicos (quadratura do círculo e trissecção do ângulo). Segundo Sciacca (1967, p.38-9), o sofista e a sofística caracterizam-se assim:

> [...] o sofista, que abandona a indagação em torno do "princípio" das coisas e concentra a sua atenção sobre o homem e seus problemas humanos (políticos, morais, jurídicos, estéticos etc.). Sofista é propriamente aquele que exercita a profissão de sábio (do mestre de virtudes) e ensina mediante estipêndio. O intento da sofística, mais que especulativo, é prático-educativo: a cultura (e a filosofia) como instrumento de formação do homem para a vida pública (do homem político) como meio de educação, limitada ao interesse por tudo o que é humano e pode ser útil aos assuntos públicos como aos privados. A filosofia tem por objeto o homem no mundo; portanto, torna-se antropologia.

Na realidade a filosofia sofística mostrou certa crítica com relação ao conhecimento que o homem pode adquirir, isto é, tornar a aquisição de todo conhecimento dependente exclusivamente do homem. Esse modo de pensar representava um desafio àqueles que

---

8 Região no litoral oeste do Peloponeso, cuja capital é Pilo.

admitiam, sem contestação, a capacidade de o homem conhecer a verdade. Ao negarem a possibilidade de ter um conhecimento exato e universal, os sofistas como que obrigaram os filósofos a investigar minuciosamente esse processo do pensamento para a apreensão do conhecimento.

Pode-se dizer que Sócrates (470-399 a.C.) aceitou o desafio dos sofistas, sem hesitação, considerando que o conhecimento é a chave de todos os demais problemas. Assim, seu interesse era descobrir um método para alcançar o verdadeiro conhecimento.

> A dialética, isto é, o método de se procurar o conhecimento por meio de perguntas e respostas, não foi inventada por Sócrates. Parece haver sido praticada primeiro, sistematicamente, por Zeno, discípulo de Parmênides; no diálogo Parmênides, de Platão, Zeno submete Sócrates à mesma espécie de tratamento a que, em outra passagem de Platão, Sócrates submete os outros. Mas há bastante razão para supor-se que Sócrates praticou e desenvolveu esse método. (Russell, 1969, p.108)

O método dialético ou socrático possivelmente contribuiu para os posteriores modos de raciocínios relacionados às demonstrações em geometria grega, mas não se prestou às descobertas. Tal método consistia em tomar a declaração feita por outrem, analisá-la e revelar sua inconsistência. Depois que o outro reconhecia as inconsistências da própria opinião, Sócrates endereçava-lhe uma série de perguntas nas quais expunha o que julgava ser verdade. Com respeito à aplicação e a possibilidade de utilização deste método socrático na busca de novas descobertas, faz-se referência à explicação estabelecida por Russell:

> Podemos, porém, aplicar o método, de maneira vantajosa, a uma classe um tanto mais ampla de casos. Sempre que aquilo que se discute é mais lógico que efetivo, a discussão constitui um bom método de se verificar a verdade. Suponhamos que alguém afirme, por exemplo, que a democracia é boa, mas que a pessoa que manifeste

> essa opinião esteja proibida de votar. Neste caso, podemos convencê-la dessa incompatibilidade e provar que ao menos uma das suas asserções deve ser mais ou menos errônea. Os erros lógicos são, penso eu, de maior importância prática do que muita gente crê, porque permitem àqueles que os cometem manter, por sua vez, uma opinião sobre qualquer tema que se discuta. Toda doutrina logicamente coerente é, com toda a certeza, contrária aos preconceitos correntes. O método dialético – ou, de maneira mais geral, o hábito da discussão sem entraves – tende a proporcionar congruência lógica, sendo, desse modo, útil. Mas de nada serve quando se trata de descobrir fatos novos. (ibidem, p.109)

Além disso, o método dialético não se presta a algumas questões, em particular, às demonstrações geométricas. De acordo com Russell (ibidem, p.108),

> certas matérias, evidentemente, não podem ser tratadas dessa maneira – como, por exemplo, a ciência empírica. É certo que Galileu empregava diálogos para defender suas teorias, mas isso apenas para vencer preconceitos: as bases positivas de seus descobrimentos não poderiam ser inseridas num diálogo, exceto de maneira sumamente artificial. Sócrates, nas obras de Platão, pretende sempre que está apenas desentranhando conhecimentos que já pertenciam ao homem que ele está interrogando; ele próprio se compara, por isso, a uma parteira. Quando, no Fédon e no Menon, aplica seu método a problemas geométricos, tem de fazer perguntas que qualquer juiz desaprovaria.

O filósofo Platão[9] (428-348 a.C.), discípulo de Sócrates, figura entre os primeiros pensadores que elaboraram uma teoria quase completa sobre o conhecimento. Adotando alguns aspectos da

9 O nome original deste aristocrata ateniense era Aristocles, mas durante a época em que frequentou a escola, recebeu ele o cognome Platão (que significa amplo, largo), por causa da largura de seus ombros.

filosofia socrática, concordou com Parmênides, considerando que a percepção dos sentidos não pode fornecer um conhecimento verdadeiro. Assim, o homem deve passar além dos sentidos para ideias que não se derivam da experiência e dela não dependam. Além disso, convém citar, conforme Russell, as influências às quais esteve exposto Platão para elaborar sua filosofia.

> De Pitágoras (quer por meio de Sócrates ou não), Platão derivou os elementos órficos de sua filosofia: a tendência religiosa, a crença na imortalidade, o outro mundo, o tom sacerdotal e tudo o que a metáfora da caverna encerra – bem como seu respeito pelas matemáticas e a sua maneira de entrelaçar estreitamente o intelecto com o misticismo.
>
> De Parmênides derivou a crença de que a realidade é eterna e intemporal, e que, logicamente, toda mudança tem de ser ilusória.
>
> De Heráclito, derivou a doutrina negativa de que não há nada permanente no mundo sensível. Isso tudo, combinado com a doutrina de Parmênides, o levou à conclusão de que o conhecimento não é derivado dos sentidos, mas algo que somente se consegue atingir por meio do intelecto. Esta maneira de pensar se adaptava, por sua vez, ao pitagorismo.
>
> De Sócrates, aprendeu, provavelmente, a refletir sobre os problemas éticos, bem como a tendência para procurar antes explicações teológicas do que mecânicas do mundo. "O bom" dominava mais as suas ideias do que a dos pré-socráticos, e é difícil deixar de atribuir-se tal fato à influência de Sócrates. (ibidem, p.123)

Segundo Russell (ibidem, p.114), convém salientar que Platão distingue dois tipos de intelecto (razão e entendimento):

> Primeiro, o mundo do intelecto distingue-se do mundo dos sentidos; depois, o intelecto e a percepção sensorial são, cada qual, divididos em duas classes. Quanto a estas duas espécies de percepção sensorial, não há necessidade de que nos ocupemos delas aqui; as duas espécies de intelecto são chamadas, respectivamente, "razão" e

"entendimento". Destas, a razão é de categoria mais elevada: ocupa-se das ideias puras, e o seu método é o dialético. O entendimento pertence à espécie de intelecto que se emprega nas matemáticas; e inferior à razão, porquanto usa hipóteses que não pode comprovar.

Além disso, há a necessidade de expor o ponto em que aparece na obra de Platão o método analítico para a investigação da verdade, que foi utilizado primeiramente pelo geômetra Hipócrates de Quios[10] (470-410 a.C.) na demonstração de algumas proposições em geometria, como ressalta Michel (1950, p.248):

> Sobre a contribuição de Hipócrates de Quios ao progresso da geometria, os dados que possuímos são felizmente muito mais precisos e mais seguros que aqueles que interessam à biografia do personagem. Essa contribuição é dupla, tendo por objeto, ao mesmo tempo, o método do trabalho científico e o estudo de certos problemas.

Segundo Tannery, Hipócrates de Quios foi o primeiro a utilizar a *apagoge*, isto é, reduzir um problema a outro mais simples. Esse método foi inovador para resolver problemas e demonstrar proposições.

> Diz-se que a primeira ἀπαγωγή (redução de um problema em outro) sobre figura difíceis foi feita por Hipócrates de Quios, que também quadrou a lúnula[11] e fez em Geometria outras numerosas descobertas, tendo tido, tanto como nenhum outro, um gênio natural para essas questões. (Tannery, 1887, p.110)

Além disso, convém citar, conforme Proclus, que o geômetra Leão, contemporâneo de Platão, estudou as condições necessárias e suficientes para que determinado problema ou teorema fosse

10 Ilha grega no Mar Egeu.
11 Figura em forma de crescente, que resulta da interseção de dois arcos de círculo cuja convexidade esteja voltada para o mesmo lado.

possível de ser resolvido ou demonstrado. Tal procedimento é designado pelo nome *diorismós*.

> Platão, que viveu depois [de Hipócrates de Quios], deu grande impulso à Matemática em geral e à Geometria em particular, como provam suas obras repletas de considerações matemáticas que provocam a admiração daqueles que se dedicam à Filosofia.
>
> Na mesma época viveram Leodamas de Thasos, Árquitas de Tarento e Teeteto de Atenas, que aumentaram o número de teoremas e os apresentaram como conjunto científico.
>
> Mais jovens que Leodamas foram Neoclides e seu discípulo Leão, que ampliaram os conhecimentos de seus antecessores. Leão compôs também Elementos de grande interesse, tanto pelo número de seus teoremas quanto pelos ensinamentos, e descobriu *diorismós* que permitem saber quando um problema é possível e quando é impossível. (Proclus apud Vera, 1970, p.1155)

Convém ressaltar, conforme Tannery (1887, p.112-3), que

> em parte alguma[12] Platão faz alusão a um método geométrico que teria sido inventado por ele; mas há uma método filosófico que está descrito no fim do livro VI da *República*, e ao qual seus discípulos têm atribuído uma grande importância: elevar a hipótese ao princípio não suposto; seguir o caminho inverso do princípio à hipótese.
>
> Nós reencontramos neste lugar a oposição constante nas demonstrações antigas entre análise e síntese; é por um singular abuso de linguagem que se chamam atualmente sintéticas as

12 Convém ressaltar que na obra *Aperçu Historique sur L'Origine et le Développement des Méthodes en Géométrie*, o geômetra Charles (1875, p.5) expõe o seguinte ponto de vista: "Existe nas matemáticas um método para a investigação da verdade, cuja invenção é atribuída a Platão e que Téon denominou análise, assim definindo-a: considerar a coisa procurada como se estivesse determinada e passar de consequência em consequência até o reconhecer-se como verdadeira a coisa procurada". Porém, aqui, compartilha-se das considerações apresentadas por Tannery.

> demonstrações geométricas de Euclides; há somente entre os antigos síntese quando houve análise, quando se recompõe na ordem inversa a sequência de proposições obtidas conforme o caminho oposto.
>
> Atualmente, não se faz mais síntese, porque é uma regra que somente procede na análise por conclusões imediatamente reversíveis. "Se A é verdadeiro, B é verdadeiro" somente é empregado se se pode dizer: "B é verdadeiro, então A é verdadeiro". É raro que os antigos tenham sido bastante assegurados da prática de seus procedimentos por se crer dispensados de fazer a contraprova, a síntese após a análise.

Não se pode esquecer o geômetra grego Eudoxo de Cnido[13] (408-355 a.C.), frequentador da Academia de Platão e Árquitas de Tarento (428-365 a.C.). Ainda que as fontes de informações sobre os trabalhos de cunho matemático de Eudoxo de Cnido sejam poucas e dada a escassez de documentos originais, aceitam-se as contribuições a ele atribuídas pelos comentaristas, em particular, por Proclus (apud Vera, 1970, p.1155):

> Um pouco mais jovem que Leão e muito amigo dos discípulos de Platão foi Eudoxo de Cnido, que ampliou o número de teoremas chamados gerais e incorporou três novas proporções às três antigas e muitas questões iniciadas por Platão sobre as seções por meio da análise.

Como salienta Proclus, é lícito atribuir a Eudoxo as proposições que Euclides de Alexandria expõe no livro V de *Os elementos* sobre grandezas gerais e suas relações, aplicadas tanto a segmentos de reta quanto a áreas, volumes etc. e que, juntamente com o chamado método de exaustão, permitiu uma abordagem rigorosa para os cálculos de áreas e volumes. Assim, Eudoxo foi quem resolveu o impasse lógico gerado pelas concepções pitagórica, como ressalta Babini (1966, p.14-5):

13 Convém distinguir Eudoxo de Cnido (geômetra) de dois homônimos: Eudoxo de Rodes (historiador), Eudoxo da Sicília (poeta cômico).

No começo do século IV a.C. a matemática tinha mais de um século de existência. Nascida à sombra da metafísica pitagórica fundada na onipresença e onipotência do número ("o número é a essência de todas as coisas"), já havia, certamente, recaído no vício. Todavia, o impulso mostrou sua incompatibilidade com aquela metafísica, uma vez que se demonstrou que não havia número (racional) para expressar a relação entre elementos tão simples como a diagonal e o lado de um quadrado, o lado de um triângulo equilátero e o diâmetro de sua circunferência circunscrita, e assim sucessivamente. Estes fatos expunham aos pitagóricos uma espantosa alternativa: manter sua metafísica, mutilando a geometria; manter a geometria, anulando sua metafísica. Ao passo que os pitagóricos discutiam essa questão, os matemáticos analisavam o problema valendo-se do ponto de vista técnico, e um deles, Eudoxo de Cnido, encontra uma solução.

A solução estabelecida pelo geômetra Eudoxo de Cnido inclui uma *definição*, um *postulado* e um *método*. A *definição* evita a dificuldade que havia apresentado a razão entre grandezas incomensuráveis, já que não havia para os gregos esse conceito. Assim define, não essa razão, mas a igualdade de razões, ou seja, a proporção existente nessa igualdade, com o intuito de contornar esse obstáculo conceitual. Tal feito encontra-se, na definição 5 no Livro V de *Os elementos* de Euclides, precedido por quatro definições sobre a natureza das razões e sobre as grandezas entre as quais existe uma razão.

1. Uma magnitude é uma parte de uma magnitude, a menor da maior, quando meça exatamente a maior.
2. E a maior é um múltiplo da menor, quando seja medida exatamente pela menor.
3. Uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero.
4. Magnitudes são ditas ter uma razão entre si, aquelas que multiplicadas podem exceder uma a outra.
5. Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos

> múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes. (Euclides, 2009, p.205)[14]

Com relação ao *postulado*, Eudoxo de Cnido estabelece uma condição para que duas grandezas tenham razão; tal postulado é expresso por Euclides na definição 4, mas Arquimedes o inclui entre os postulados do tratado *Sobre a esfera e o cilindro* e como *lema* na *Quadratura da parábola*:

> Entre as linhas desiguais, as superfícies desiguais e os corpos sólidos desiguais, o maior excede o menor por uma quantidade que, adicionada a si mesma (um número suficiente de vezes), pode exceder qualquer uma dada quantidade tendo uma relação com as quantidades comparadas entre si. (Arquimedes, 1971p.11)

A definição 4 é extremamente importante e foi muito usada por Arquimedes. Daí ser conhecida hoje como *postulado de Arquimedes* ou, às vezes, *postulado Eudoxo-Arquimedes*. Além disso, Euclides a usou para demonstrar a proposição[15] 1 do livro X que formava a base do método de exaustão dos gregos:

> Sendo expostas duas magnitudes desiguais, caso da maior seja subtraída uma maior do que a metade e, da que é deixada, uma

14 Essa definição significa, em notação moderna: assim, $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se, e somente se, dados inteiros $m$ e $n$ sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; ou se $ma = nb$, então $mc = nd$; ou se $ma > nb$, então $mc > nd$.

15 Conforme Boyer (1974, p.67): "Esta proposição, que chamaremos de 'propriedade de exaustão', equivale à formulação moderna seguinte. Se $M$ é uma grandeza dada, $\varepsilon$ uma grandeza prefixada de mesma espécie e $r$ é uma razão tal que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então podemos achar um inteiro $N$ tal que $M(1 - r)^n < \varepsilon$ para todo inteiro $n > N$. Isto é, a propriedade de exaustão equivale a dizer que $\lim_{n \to \infty} M(1-r)^n = 0$. Ainda mais, os gregos usaram essa propriedade para provar teoremas sobre as áreas e volumes de figuras curvilíneas".

maior do que a metade, e isso aconteça sempre, alguma magnitude será deixada, a qual será menor do que a menor magnitude exposta. (Euclides, 2009, p.354)

Por fim, o *método* idealizado e aplicado pela primeira vez em demonstrações geométricas por Eudoxo de Cnido é o que parece indicar Arquimedes no prefácio endereçado ao geômetra Dositeo de Pelúsio, no tratado *Sobre a esfera e o cilindro*:

Agora tendo conseguido provar alguns teoremas que não se tinha demonstrado antes, entre os quais figuram:

b) A área de uma esfera é o quádruplo de seu círculo máximo.
c) A área de um segmento esférico equivale a um círculo de raio igual à reta traçada desde o vértice do segmento à circunferência do círculo base do segmento.
d) Um cilindro de base igual ao círculo máximo de uma esfera e altura igual ao diâmetro dessa esfera é o triplo da metade da esfera.
e) A área do cilindro é também igual ao triplo da metade da esfera.

Embora essas propriedades sejam inerentes às figuras que acabo de me referir, não haviam sido conhecidas por aqueles que me tem precedido no estudo da Geometria e será fácil compreender a verdade de meus teoremas àqueles que lerem atentamente as demonstrações que deles dou. O mesmo tem sucedido com os que Eudoxo considerou nos sólidos e têm sido admitidos, como os seguintes:

f) Uma pirâmide é o terço de um prisma de mesma base e de mesma altura.
g) Um cone é o terço de um cilindro de mesma base e de mesma altura.

Estas propriedades estavam naturalmente adscritas às figuras antes de Eudoxo, mas não foram descobertas por geômetra algum. (Arquimedes, 1971, p.8)

Com relação ao método de exaustão, convém salientar, segundo Babini (1966, p.16-7), que não se trata de um método para realizar descobertas, mas de um método para fazer demonstrações, isto é, é necessário ter um conhecimento prévio do resultado que se quer demonstrar para que seja possível realizar uma demonstração rigorosa:

> A primeira observação importante que se formula é que não se trata de um método de descobrimento, mas de demonstração, isto é, que supõe conhecido de alguma maneira o resultado, e oferece um procedimento rigoroso para demonstrá-lo. Além disso, observamos como, já na época de Eudoxo, a matemática refletia sua característica fundamental de ter por acento o processo dedutivo, a demonstração, e não o resultado.
>
> Conhecido de antemão o resultado, a demonstração pelo método de Eudoxo de que, por exemplo, uma certa figura A é equivalente a uma figura conhecida B, consiste numa dupla redução ao absurdo provando que os supostos de A maior ou menor do que B conduzem à contradições, de maneira que não fica outra alternativa senão a de que A seja equivalente a B. E é nessa demonstração que joga seu papel o postulado, já que a demonstração exige que se possa decompor a figura em partes tais que uma delas seja inferior a uma figura dada, e isso se obtém precisamente em virtude do postulado. Essa decomposição da figura em partes cada vez menores foi a causa pela qual um matemático renascentista deu ao método o nome de "método de exaustão", embora na verdade tal decomposição não "esgote" a figura, mas só chegue ao ponto em que certa figura é menor do que uma figura dada.

Abaixo, segundo Ribnikov (1987), com algumas modificações, expõe-se uma descrição pormenorizada do método de exaustão:

1. se é necessário, por exemplo, calcular a área ou o volume de uma figura $\Sigma$, então, como primeiro procedimento, nessa figura inscreve-se uma sequência de outras figuras $F_1$, $F_2$, ..., $F_{n-1}$, $F_n$,... cujas áreas ou volumes crescem monotonamente e

para cada figura dessa sequência pode-se determinar a área ou volume;

2. as figuras $F_k$ ($k \in IN$) são escolhidas de tal modo que a diferença positiva $\Sigma - F_k$ pode ser feita tão pequena quanto se queira;
3. do fato da existência e construção das figuras inscritas $F_1$, $F_2$, ..., $F_{n-1}$, $F_n$ na figura $\Sigma$, faz-se a dedução que o limite superior da sequência das figuras inscritas será a figura $\Sigma$;
4. implicitamente, em geral, com o auxílio de outras considerações teóricas ou práticas, busca-se conseguir o valor de $F$, isto é, o limite da sequência das figuras $F_1$, $F_2$, ..., $F_{n-1}$, $F_n$;
5. para cada problema em particular, demonstra-se que $F = \Sigma$, isto é, que o limite da sequência das figuras inscritas é igual à área ou ao volume de $\Sigma$;
6. por fim, os geômetras gregos utilizavam-se de uma ferramenta essencial para fazer demonstrações em matemática, isto é, como parte desse processo, a demonstração realiza-se por dupla redução ao absurdo. Assim, seja $F \neq \Sigma$, então $\Sigma > F$ ou $\Sigma < F$. Suponha que $\Sigma > F$, escolhe-se um termo $F_n$ da sequência tal que $\Sigma - F_n < \Sigma - F$; isso será possível para qualquer diferença fixada $\Sigma - F$. Desse modo, infere-se que deva ser $F_n < F$, mas isso é impossível, porque $F$ é o limite da sequência de figuras, isto é, $F \geq F_n$ para todo $n$ finito. Agora, suponha que $\Sigma < F$, escolhe-se um termo $F_n$ da sequência tal que $F - F_n < F - \Sigma$; isso será possível para qualquer diferença fixada $F - \Sigma$. Desse modo, infere-se que deva ser $F_n > \Sigma$, mas isso é impossível, uma vez que $\Sigma$ é o limite da sequência de figuras, isto é, $\Sigma \geq F_n$ para todo $n$ finito. Portanto, por intermédio desses argumentos lógicos, conclui-se que $F = \Sigma$.

O próximo estágio no desenvolvimento do pensamento humano sobre as várias formas de apreensão do conhecimento, com o intuito de obter a verdade pura, é dado pelo modo de organizar leis gerais em conexão com conceitos elaborados pelo intelecto para conceber juízos e, sucessivamente, a conexão desses juízos para elaborar raciocínios. Tais processos são conseguidos segundo a lógica.

> As pessoas podem apresentar ou deixar de apresentar evidências em apoio de suas afirmações. Uma afirmação que está apoiada pela evidência é a conclusão de um argumento, e a Lógica elabora técnicas para a análise de argumentos. A análise lógica procura examinar as relações que existem entre uma conclusão e a evidência que lhe serve de apoio.
>
> Quando as pessoas raciocinam, fazem inferências. Estas podem transformar-se em argumentos, e as técnicas da Lógica podem, então, ser aplicadas aos argumentos daí resultantes. É desse modo que as inferências que originaram os argumentos podem ser examinadas.
>
> A Lógica trata, portanto, de argumentos e inferências. Um de seus propósitos básicos é apresentar métodos capazes de identificar os argumentos logicamente válidos, distinguindo-os dos que não são logicamente válidos. (Salmon, 1971, p.13)

Essa maneira de proceder mediante a silogística, que é o núcleo essencial da lógica, tem suas origens com o filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.), que propõe, segundo registros históricos, a primeira fundamentação lógica, epistemológica e metodológica de uma ideia ou procedimento para uma demonstração, com intuito de que esse procedimento esteja alicerçado sobre bases científicas. Assim, tal demonstração deve satisfazer a uma condição lógica estabelecida de forma coerente e concludente segundo um procedimento silogístico; esse processo deve satisfazer a certas condições epistemológicas [16]de construir e estruturar de forma inteligível uma série ordenada e finita de verdades necessárias e suficientes à demonstração; e, por fim, esse processo deve satisfazer a uma condição metodológica que pertence a essa estrutura lógica, a qual supõe uma distinção entre princípios fundamentais não demonstráveis dessa estrutura lógica e os que podem ser demonstrados tomando-se por base esses princípios fundamentais, que servirão de base aos conhecimentos: definições, teoremas, corolários, lemas, problemas etc.

16 Condições que podem ser estabelecidas por intermédio de um estudo crítico dos princípios fundamentais, das hipóteses e das séries de dados num encadeamentos lógico.

Desse modo, o sistema aristotélico perdurou, sem maiores alterações, até o século XIX, quando a lógica simbólica começou a ser desenvolvida pelo matemático inglês George Boole (1815-1864) em suas investigações sobre o raciocínio simbólico, que o conduziram a publicar, em 1854, a obra intitulada *An Investigation of the Laws of Thought, on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities*,[17] que transformou a lógica tradicional aristotélica, do ponto de vista tanto da forma quanto do espírito, em um dos ramos da Matemática. Ainda com relação à conquista obtida por Aristóteles como o criador da lógica, convém ressaltar que

> embora, entre historiadores, seja quase um lugar comum afirmar que as grandes conquistas intelectuais nunca se devem a uma pessoa apenas (Euclides utilizou-se, para fundar a geometria, de resultados obtidos por Eudoxo e outros; quanto à mecânica, Newton pôde erguer-se sobre os ombros de Descartes, Galileu e Kepler; e assim por diante), Aristóteles, segundo todas as evidências a nosso alcance, criou a ciência lógica inteiramente *ex nihilo*. Com uma franqueza que desarma, ele próprio nos diz isso, em passagem ao fim das *Refutações aos sofistas*, e não há motivo para duvidar da precisão de seu relato. Muitos estudiosos afirmaram, apoiados em argumentos *a priori*, que tal ato de criação é impossível e lançaram-se ao exame das obras dos predecessores de Aristóteles, especialmente Platão, procurando encontrar, pelo menos, o germe da lógica aristotélica. A busca foi inteiramente infrutífera. (Mates, 1968, p.247)

Segundo Zeuthen (1902, p.15), o filósofo Aristóteles ocupou-se muito das Ciências Naturais e, especialmente, da Filosofia, mas também se ocupou da Matemática. Ainda que não tivesse sido um geômetra, ocupa, por direito, lugar de destaque na História da Matemática por suas contribuições para o desenvolvimento e progresso dessa ciência:

17 Uma investigação das leis do pensamento, sobre as quais estão fundadas as teorias matemáticas da lógica e das probabilidades.

> [...] [Aristóteles] mostrou alguma preferência pela Matemática, sem todavia desenvolver alguma parte do conhecimento provindo dessa ciência, mas a atitude destes dois homens [Platão e Aristóteles] foi tal que os matemáticos puderam encontrar lugar [emprego] nas sociedades sábias da época, a escola acadêmica de Platão e a peripatética de Aristóteles, nesses locais puderam trabalhar de acordo com outros pensadores e fazer-se compreender; e que a Matemática e a Filosofia puderam dar-se um impulso recíproco, tanto pelas relações pacíficas quanto pelas suas discórdias: desse modo, a Matemática tornou-se um elemento da alta cultura grega e a forma, o tom que assumiram nesta época, deixa reconhecer que elas se desenvolveram nos círculos de esmerada educação, nos quais os pensadores tinham pretensões a exprimir-se com precisão, visto que, com suas investigações lógicas, Aristóteles estabeleceu as bases sobre as quais se ordena e se constitui uma ciência dedutiva tal qual é a Matemática.

Essas realizações dos gregos no campo da Matemática mostraram a importância da atividade racional do homem na busca de conhecimento e constituem a primeira prova concludente da capacidade racional humana para deduzir verdades novas, já que, quando se estudam as realizações instituídas pelo povo grego, nota-se em toda cultura iniciada por esses homens de ciência que esses pensadores tiveram inspiração para aplicar a razão à filosofia, à literatura, à arte, à ciência e à religião.

Desse modo, chega-se ao fim da odisseia das realizações do pensamento matemático grego, na obra clássica da geometria plana e espacial *Os elementos*, de Euclides de Alexandria (330-275 a.C.), que permaneceu para a posteridade. Nessa obra encontra-se explicitamente uma mostra desse desenvolvimento racional alcançado pelo homem na busca de conhecimento, perfeição e estética. A obra *Os elementos* divide-se em treze livros; o primeiro pode ser considerado o de maior interesse, já que nele Euclides introduz as noções fundamentais da Geometria e enuncia 23 definições, suas principais propriedades na forma de cinco postulados e nove axiomas, com os quais fundamenta a chamada geometria euclidiana. Porém, convém salientar a

importância do livro *Dados* (δεδομένα), atribuído a Euclides, como instrumento auxiliar do método analítico que possivelmente era utilizado por ele como um procedimento heurístico na busca de soluções para seus problemas geométricos. Segundo Zeuthen (ibidem, p.87),

> o valor deste livro (*Dados*) é evidente como instrumento auxiliar da análise: trata-se, na "transformação", de encontrar na figura, provida se for preciso das linhas auxiliares, das partes conhecidas susceptíveis de determinar as partes desconhecidas, e se fosse necessário em seguida, na resolução, justificar que se dispõe realmente do que exige a solução do problema.

Pode-se dizer que uma grande parte do saber geométrico-aritmético acumulado e absorvido até o começo do século III a.C. pelos matemáticos gregos foi codificada em *Os Elementos de Euclides*. Como é possível constatar em linhas anteriores, *Os elementos* não contém toda a geometria grega, nem é um resumo de toda ela; sem dúvida, contém uma porção considerável da Matemática que os geômetras anteriores a Euclides e o próprio Euclides elaboraram, mas essa parte não foi escolhida ao acaso, e sim selecionada conforme um critério prefixado que converteu esse conjunto de conhecimentos num sistema axiomático. Pode-se notar como é rígida essa tendência à sistematização em Euclides, cujo modelo tem servido para um tipo de construção científica, ou seja, um método científico utilizado, desde então, na Matemática. Convém salientar que o método euclidiano, que os matemáticos e filósofos contemporâneos preferem designar como *método axiomático*, consiste em denunciar previamente as hipóteses básicas sobre as quais se constituirá a ciência e logo construí-la numa forma rigorosamente dedutiva. Pode-se dizer que esse método dedutivo é de difícil realização, tanto para a escolha das hipóteses básicas como para o desenvolvimento dedutivo. Nesse ponto, a crítica moderna denuncia que em *Os Elementos* o método axiomático não aparece revestido de todas as precauções necessárias, nem cumpre todas as exigências que impõe a lógica, circunstâncias que evidentemente não diminuem o mérito de Euclides em ter aplicado pela primeira

vez, no século III a.C., um método fecundo para a Matemática, em particular, para a geometria. Como salienta Barker (1969, p.38-9),

> Euclides, nos *Elementos*, visava aperfeiçoar o nosso conhecimento acerca de pontos, linhas e figuras, tornando mais rigorosas as demonstrações de leis já conhecidas, e visava aumentar esse conhecimento, demonstrando leis novas, até então desconhecidas. Euclides cogitava de dar à Geometria uma forma dedutiva sistemática porque isso lhe permitiria demonstrações mais rigorosas e lhe facilitaria a descoberta de novas leis. Não se esgota aí, entretanto, a motivação do geômetra, assim como não se resume em facilitar descobertas e tornar mais rigorosas as demonstrações o motivo pelo qual os estudiosos do presente adotam as exposições axiomáticas. Com efeito, Euclides e os modernos cultores da Geometria introduzem nas suas apresentações da Geometria inúmeros aspectos que seriam perfeitamente dispensáveis, caso o seu propósito fosse apenas revelar que certas leis são válidas e se acham acima de qualquer suspeita. A colocação de axiomas e teoremas em forma dedutiva tem um propósito adicional, a saber, o de apresentar as leis da Geometria de modo elegante e transparente a fim de que interessantes conexões lógicas se tornem facilmente perceptíveis. É esse objetivo, tão característico do pensamento matemático, o que leva Euclides a demonstrar, a duras penas, fatos que os leitores consideram óbvios. A descoberta de novas conexões lógicas norteia os modernos estudiosos, levando-os a buscar axiomatizações mais elegantes e econômicas.

Continuando a tradição matemática grega, que teve Euclides de Alexandria como um de seus importantes representantes, podem ser considerados possíveis sucessores à Escola de Alexandria os geômetras Conon de Samos, Dositeo de Pelúsio[18] e Eratóstenes de Cirene[19] (284-196 a.C.), que foram amigos e correspondentes de Arquimedes de Siracusa[20] (287-212 a.C.), filho do astrônomo Fídias. Este último

18 Cidade antiga próxima à foz do rio Nilo.

19 Antiga capital de uma região no norte da África.

20 Cidade da Sicília, fundada pelos gregos em 784 a.C.

estudou a relação entre o diâmetro do sol e o diâmetro da lua, e Arquimedes relata a descoberta em seu tratado *Arenário*, endereçado a Gelão filho de Hierão II (270-214 a.C.).

Alguns dos trabalhos de Arquimedes estão endereçados a esses geômetras, por exemplo, *Sobre a esfera e o cilindro* (livro I e II), *Sobre conoides e esferoides*, *Sobre as espirais* e *A quadratura da parábola*, enviados à Dositeo de Pelúsio, *O problema dos bois* e *O método,* a Eratóstenes de Cirene, e *Sobre as espirais,* a Conon de Samos. Além desses trabalhos, há algumas obras sobre temas variados que também são atribuídas a Arquimedes, ainda que estejam desaparecidas. Há escritos aritméticos (sistema de numeração), geométricos (poliedros semirregulares), mecânicos (alavanca, balança, centros de gravidade e condições de equilíbrio de planos e sólidos), ópticos (espelhos e fenômenos de refração) e astronômicos (técnicas de construção de planetários).

É provável que Arquimedes, na sua juventude, tenha estudado em Alexandria, onde conheceu estes geômetras (Conon de Samos, Dositeo de Pelúsio e Eratóstenes de Cirene) com os quais manteve correspondência durante sua estada em Siracusa; Arquimedes passou a maior parte de sua vida em Siracusa, sua cidade natal, e nesse local alcançou fama e notoriedade, mais por seus engenhos mecânicos do que pelas suas descobertas matemáticas e científicas. Com relação aos seus inventos, há apenas informações esparsas contidas nas obras científicas e matemáticas escritas por Fílon de Bizâncio (280-220 a.C.), Vitrúvio (85 - 20 a.C.), Herão de Alexandria (10-75 d.C.), Pappus de Alexandria (290-350 d.C.) e Teão de Alexandria (335-405 d.C.) e nas obras históricas escritas por Políbio (200-118 a.C.), Cícero (106-43 a.C.) e Plutarco (46-122 d.C.). A obra matemática de Arquimedes chegou até nossos dias por meio dos comentários realizados por Eutócio de Ascalão (480-540 d.C.) e pela reunião dos manuscritos arquimedianos realizados pelo matemático constantinopolitano Leão de Tessalônica no século IX. Conforme Mugler (1970, p.XXIII-XXIV),

> certos tratados que Arquimedes tinha enviado um a um a seus colegas geômetras de Alexandria, em intervalos de tempos às

> vezes bastante longos, como o mostram as cartas endereçadas a Conon, Dositeo e Eratóstenes, colocadas no seu início, aparecem pela primeira vez reunidos num manuscrito do século IX, o *Codex A* (Heiberg), composto em Constantinopla por iniciativa de Leão, o matemático, nomeado diretor da Universidade de Bizâncio, por Bardas, em 863. [...] após a batalha de Bénévent, em 1266, o manuscrito foi oferecido ao Papa, por Carlos d'Anjou, talvez com outro manuscrito, o *Codex £*, segundo a notação de Heiberg, que compreendia alguns tratados de Arquimedes, ao lado de outros trabalhos, sobre a mecânica e a óptica. Em 1491, o *Codex A* é propriedade do humanista italiano G. Valla, que o mostra à Janus Lascaris. Valla morre sem realizar a edição que parece ter projetado; porém, um inventário desse tempo mostra que o manuscrito A incluía os tratados: *Sobre a esfera e o cilindro*, *A medida do círculo*, *Sobre os conoides e os esferoides*, *Espirais*, *Do equilíbrio das figuras planas*, *O arenário*, *A quadratura da parábola* de Arquimedes, os *Comentários* de Eutócio e o tratado *Das Medidas* de Herão de Alexandria. Adquirido, após a morte de Valla, pelo preço de 800 peças de ouro pela família do príncipe Pio, o *Codex A* desaparece na segunda metade do século XVI e não foi encontrado até hoje. Mesmo Heiberg, grande caçador de manuscritos, não teve êxito em encontrar vestígios desse manuscrito.
>
> Felizmente para nós, o *Codex A* foi copiado ou traduzido várias vezes, inteira ou parcialmente, antes de seu desaparecimento.

Como se observa nessa citação, mesmo havendo essas traduções, o texto arquimediano não estava completo, porque faltavam os tratados *O método* e *Sobre os corpos flutuantes*, que foram descobertos pelo helenista dinamarquês Johan Ludvig Heiberg[21] (1854-1928) em 1906, na cidade de Istambul, procedentes do Santo Sepulcro de Jerusalém, em um palimpsesto.[22]

21 Não confundir com seu homônimo, e possivelmente um parente, Johan Ludvig Heiberg (1791-1860), filólogo, filósofo, dramaturgo e diretor do Teatro Real de Copenhague.

22 Conforme Bueno (1946), Palimpsestos – do grego – *palin* (de novo) + *psestos*, do verbo ψάω = raspar: Os pergaminhos sobre os quais os copistas escreviam

O material descoberto por Heiberg era composto por 185 fólios, 177 deles em pergaminhos e os demais (do 178º ao 185º) em papel do século XVI, conservado pelos monges do século XIII, que escreveram, sobre uma cópia do manuscrito arquimediano do século X, uma coleção de textos litúrgicos e preces. Esse manuscrito foi catalogado e estudado por Heiberg, como explica Mugler (ibidem, p.XXIV – XXV):

> O *Codex A* não contendo nem o tratado *Dos corpos flutuantes*, conhecido pela tradução latina de G. Moerbeke, [...] nem o tratado *O método*, citado entre outros por Herão de Alexandria, a lista dos manuscritos gregos de Arquimedes estava incompleta no fim do século XIX. Heiberg, então, faz entrar na história do texto de Arquimedes seu famoso *Codex C*, um palimpsesto do *métochion* constantinopolitano do Santo Sepulcro de Jerusalém. Examinando o manuscrito, em 1906 e em 1908, Heiberg acha que ele continha um texto de Arquimedes copiado no século X, ao qual se tinha sobreposto, alguns séculos mais tarde, o texto de uma coletânea de preces. A decifração do texto original fez aparecer fragmentos dos tratados *Da esfera e do cilindro*, *Das espirais*, *A medida do círculo*, *Do equilíbrio das figuras planas* e o opúsculo Στομάχιον, porém, sobretudo, uma

---

eram raspados. Na Idade Média, a produção dos pergaminhos era um dos privilégios dos monges, passando depois a ser ofício de todos os que a ele quisessem dedicar-se. Em seu preparo eram utilizadas peles de vários animais, como carneiros, ovelhas, novilhos, combinadas com alume – sulfato duplo de alumínio e de potássio. A Idade Média deu preferência ao emprego do pergaminho – membrana *pergamena, pergamenum* – assim denominado por ser um processo da cidade de Pérgamo. Acontecia então que a produção do pergaminho não bastava para o consumo, oferecendo grandes dificuldades aos copistas. Estes se valiam em tais apertos do expediente de raspar ou de lavar os pergaminhos já escritos, cujos assuntos pareciam de pouca importância ou de interesse secundário. Como se pode constatar, para os monges eram mais importantes os assuntos eucológicos (do grego – *euklologion*: coleção de orações), isto é, uma coleção de orações e liturgias usadas na Igreja Ortodoxa Oriental. Assim, sacrificaram muitos textos clássicos da Antiguidade para sobre eles copiarem passagens dos salmos, orações e crônicas do mosteiro. Mas felizmente a técnica digital tem modernamente conseguido fazer aparecer os primitivos caracteres.

parte importante do texto grego, ausente até o momento, do tratado *Sobre os corpos flutuantes* e o texto do tratado, ainda totalmente desconhecido, *O método*.

Heiberg havia editado em 1881, após alguns anos de pesquisas e estudos das várias famílias[23] de textos arquimedianos, uma obra crítica[24] dos trabalhos de Arquimedes. Na segunda edição dessa obra, publicada entre 1910 e 1915, Heiberg acrescenta os tratados *Sobre os corpos flutuantes* e *O método*. Como salienta Mugler (ibidem, p.XXIX):

> Em 1881 surgiu em Leipzig a magistral edição de Heiberg em três volumes, *Archimedis Opera cum commentariis Eutocii*, estabelecida na ocasião sobre resultados adquiridos pelo trabalho crítico e

---

23 Ainda conforme Bueno (1946), sobre a genealogia dos manuscritos: no século XIX foi que se criou essa maneira de classificar os manuscritos genealogicamente, dividindo-os em *famílias*. Esse método é excelente e tem dado à crítica de textos grandes facilidades e presteza que os antigos desconheceram. O processo consiste em aproximar os manuscritos como membros duma mesma família segundo as inovações que lhes são comuns e que devem ter recebido de um mesmo ascendente. Tomando por base o princípio de que "identidade de leitura implica identidade de origem", a semelhança existente entre vários manuscritos, ainda que não seja uma garantia de derivação, pode ser suficiente para estabelecer certa conexão entre eles. Assim, supondo que se conheçam cinco manuscritos duma mesma obra, relacionando-os todos entre si, notar que dois deles – *A*, *B* – diferem em muitos pontos dos restantes *C* – *D* – *E*, mas tanto o grupo de *A* – *B* quanto o de *C* – *D* – *E* oferecem vários lugares em que são semelhantes entre si, pode-se estabelecer duas famílias: *X* que compreende *A* – *B* e *Y* que compreende *C* – *D* – *E*. Diz-se então que *X* é o ascendente de *A* – *B* e *Y* é o ascendente de *C* – *D* – *E*. Continuando este processo, comparam-se os dois ascendentes *X* – *Y* entre si. Verificando-se que em alguns pontos são comuns, esta identidade permite supor um ascendente de ambos, que se denomina *Z*. Este manuscrito será o arquétipo. Dispondo-os em quadro, tem-se (arquétipo): *Z* implica *X* e *Y*, e *X* implica *A* e *B*, e *Y* implica *C*, *D* e *E*. O arquétipo *Z* é reconstituído pela soma dos pontos e passagens comuns aos dois ascendentes *X* e *Y*, trabalho que depende da crítica conjectural do filólogo, poliglota, matemático e historiador.

24 Quando se corrigem os erros do texto e se juntam explicações para esclarecer os lugares obscuros, dando as variantes das diversas edições ou dos diversos manuscritos, a edição será crítica.

exegético de quatro séculos e sobre a experiência pessoal do autor na tradição de textos e seu conhecimento aprofundado do pensamento de Arquimedes. Após sua descoberta do *Codex C*, Heiberg publica, de 1910 a 1915, a segunda edição das obras de Arquimedes, na qual se encontram reunidas pela primeira vez todos os tratados atualmente conhecidos do grande geômetra.

Com relação aos tratados de Arquimedes, como se observa nos títulos enunciados anteriormente, as contribuições do geômetra siracusano abarcam vários domínios da Matemática grega à sua época, como geometria, aritmética, astronomia, mecânica e óptica. Além disso, convém salientar um aspecto inovador na matemática produzida por Arquimedes que se caracteriza por um rompimento com a tradição grega geométrica encaminhada a determinar medidas (áreas e volumes) e analogias entre essas medidas (quadratura, cubaturas e retificações de curvas) estabelecida pelos geômetras do século III a.C. e, em particular, por Euclides de Alexandria. Assim, a geometria arquimediana procurou considerar e demonstrar proposições sobre áreas e volumes limitadas por novas linhas ou superfícies curvas (quadratura da parábola e espirais, cubaturas da esfera, cilindro, conoides e esferoides), equilíbrio de planos e seus centros de gravidade sobre corpos flutuantes.

Para estabelecer seus resultados, Arquimedes utilizava procedimentos heurísticos, isto é, recursos provenientes das investigações mecânicas, uma vez que suas descobertas geométricas estão fundadas e relacionadas com postulados e proposições de estática e hidrostática formuladas nos tratados *Sobre o equilíbrio dos planos* e *Sobre os corpos flutuantes*, que não só permitem elaborar um esboço prévio das soluções ou demonstrações de alguns problemas ou teoremas geométricos, mas sugerem um delineamento plausível que possibilitará facultar essas soluções ou demonstrações por meio de um raciocínio rigorosamente lógico, firmado em verdades desde logo aceitas sem demonstração e em outras verdades de antemão demonstradas em conformidade com os padrões clássicos da geometria grega, por intermédio do *método de exaustão*.

Com exceção do *Arenário, O método* e os escritos menores (*Sobre o heptágono no círculo, Sobre os círculos tangentes, Sobre os triângulos, Sobre as propriedades dos triângulos retângulos, Sobre as paralelas, O stomachion* e *Lemas*), pode-se afirmar que no restante dos trabalhos de Arquimedes aparecem determinações de centros de gravidade, áreas e volumes (esfera, conoides, paraboloides etc.) obtidas segundo o método de exaustão; evidentemente, esse método exige um conhecimento prévio do resultado que se quer demonstrar. Desse modo, é lícita a pergunta: como Arquimedes conhecia e obtinha esses resultados que logo demonstrava rigorosamente? Em seus escritos, com exceção de em *O Método,* Arquimedes nada revela sobre os procedimentos ou métodos utilizados para obter aqueles resultados.

Como, por exemplo, Arquimedes sabia previamente que o segmento do paraboloide de revolução é uma vez e meia o cone de igual base e altura? Ou que a cunha cilíndrica é um sexto do paralelepípedo circunscrito nesse cilindro? Ou que toda esfera é igual a quatro vezes o cone que tem base igual ao círculo máximo da esfera e altura igual ao raio da esfera? E é aqui que entra em cena o método heurístico mecânico de descobertas, formalizado mediante os postulados e proposições demonstradas no tratado *Sobre o equilíbrio de planos*.

Como exemplo, será discutida a Proposição 2 de *O método* de Arquimedes.

> 2[25]
>
> Certamente, isto que foi mencionado não demonstra o que procede, mas...
>
> Que toda esfera é o quádruplo do cone tendo a base igual ao grande círculo da esfera, e altura igual a partir do centro para fora[26] da esfera,[27] e o cilindro tendo a base igual ao grande círculo da esfera e altura igual ao diâmetro da esfera, é o que contém outro tanto e

25 Volume da esfera.

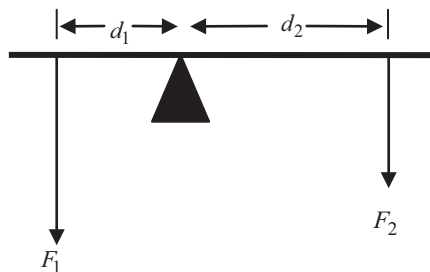
26 Significando o raio.

27 Ver demonstração geométrica no tratado *Sobre a esfera e o cilindro*, Livro I, Proposição XXXIV.

mais metade da esfera.[28] (Arquimedes, 1971, p.174, tradução nossa, ver Anexo)

Tomando como base *The Method of Archimedes,* o artigo de Del Grande (1993, p.240-3), pode-se afirmar que Arquimedes imaginou seccionar um sólido cujo volume se quer calcular em um grande número de discos e suspendê-los numa extremidade de uma balança imaginária, de modo que equilibrassem um outro sólido cujo volume e centro de gravidade fosse conhecido.

No tratado *Sobre o equilíbrio de planos*, Proposição 6, Arquimedes estabelece que "dois pesos comensuráveis equilibram-se a distâncias inversamente proporcionais a eles" e completa na próxima proposição que "o teorema é também válido quando os pesos são incomensuráveis". Assim, numa linguagem moderna, observa-se na Figura 1 uma haste rígida equilibrada sobre um cutelo, chamado ponto de apoio, sob a ação de duas forças, $F_1$ e $F_2$. Se as forças $F_1$ e $F_2$ estão distantes $d_1$ e $d_2$, respectivamente, do ponto de apoio, então $F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2$. Desse modo, Arquimedes usa esse princípio da estática para calcular o volume da esfera.

Figura 1

28 Ver demonstração geométrica no tratado *Sobre a esfera e o cilindro*, Livro I, Proposição XXXIV, corolário.

Pode-se afirmar, em termos modernos, que Arquimedes encontrou o volume de uma esfera comparando a massa de uma esfera e de um cone com a de um cilindro. Ele considerou inicialmente os sólidos mostrados na Figura 2: uma esfera de raio $r$, um cilindro circular reto com uma base de raio $2r$ e altura $2r$ e um cone circular reto com uma base de raio $2r$ e altura $2r$.

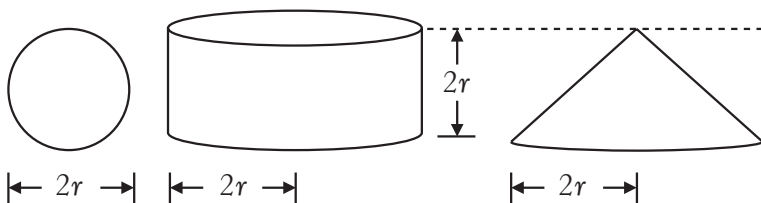
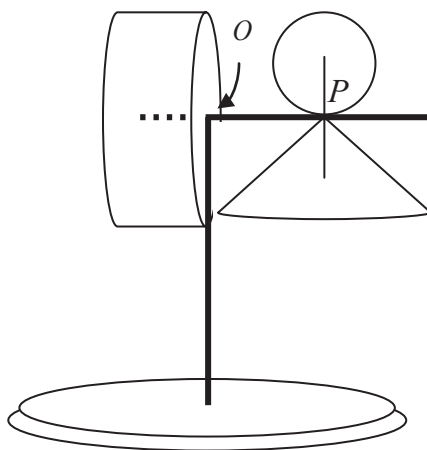
Figura 2

Arquimedes mostrou que a esfera e o cone equilibravam o cilindro sobre o braço de uma alavanca em que $o$ é o ponto de apoio, como mostra a Figura 3.

Figura 3

Em seguida, Arquimedes demonstrou que o momento de uma fina partição do cilindro a uma distância $x$ do ponto de apoio $o$

equilibraria a soma dos momentos de cada uma das finas partições da esfera e do cone a uma distância $x$ do ponto $P$. Usando esse fato, ele mostrou que o cilindro equilibraria a esfera e o cone.

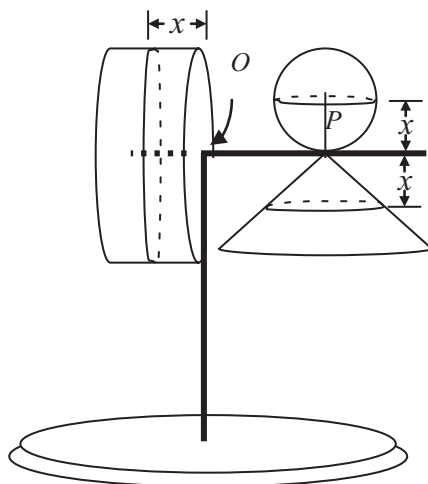
Figura 4

Desse modo, seguindo esses argumentos, uma interpretação da demonstração de Arquimedes seria a seguinte: a espessura de cada fina partição é $\Delta x$, em que $\Delta x$ é muito pequena. Assim, a fina partição do cilindro é um círculo de raio $2r$ e a espessura dessa partição é $\Delta x$ e, então, o volume desta fina partição do cilindro será $V_c = \pi(2r)^2 \Delta x = 4\pi r2\ \Delta x$, como mostra a Figura 5.

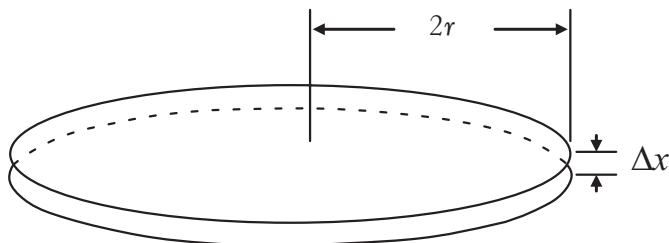
Figura 5

Considerando a esfera, sua fina partição tem raio igual a $\sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{2rx - x^2}$ . Então, o volume desta fina partição da esfera será $V_e = \pi(2rx - x^2)\, \Delta x = 2\pi rx\, \Delta x - \pi x^2\, \Delta x$, como mostra a Figura 6.

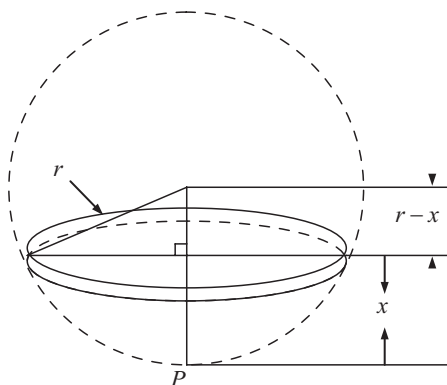
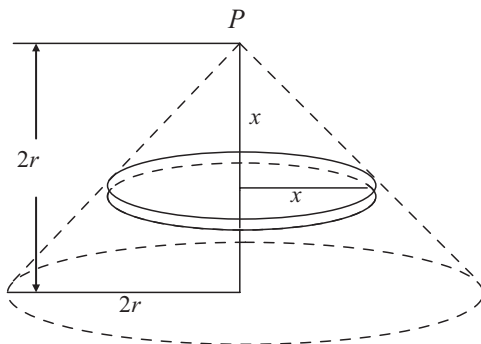
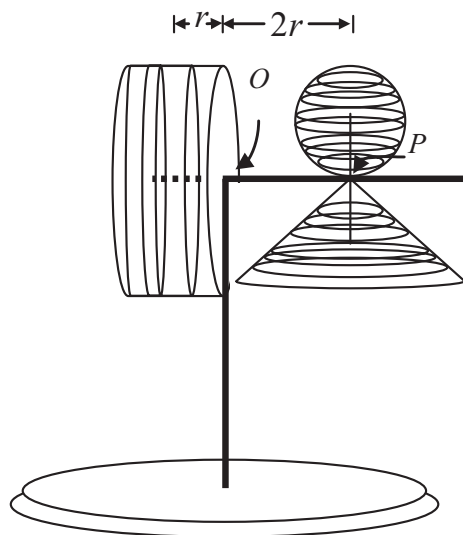
Figura 6

Por fim, a altura do cone é igual ao raio da base e o raio da partição é igual a $x$, então, o volume desta partição do cone será $V_k = \pi x^2\, \Delta x$, como mostra a Figura 7.

Figura 7

Suponha-se que os três sólidos são feitos do mesmo material homogêneo e que a massa de cada um, por unidade de volume, seja

igual a 1. A força da gravidade sobre as massas de cada fina partição circular pode ser considerada como atuando nos centros dessas finas partições circulares. Para a fina partição do cilindro o centro de gravidade está a $x$ unidades do ponto de apoio $o$. Os centros de gravidade das finas partições da esfera e do cone estão sobre uma linha vertical que passa pelo ponto $P$, o qual está situado a $2r$ unidades do ponto de apoio $o$. Portanto, o momento da fina partição do cilindro próximo do ponto de apoio $o$ é igual a $4rx^2 \Delta x(x)$. A soma dos momentos das finas partições da esfera e do cone próximas do ponto de apoio $o$ é igual a $[\pi(2rx - x^2) \Delta x + \pi x^2 \Delta x] 2r = (2rx\Delta x)2r = 4rx^2 \Delta x(x)$.

Assim, considerando que os momentos são iguais e opostos, a fina partição do cilindro equilibra as finas partições da esfera e do cone combinadas.

Então, Arquimedes considerou o cilindro como a soma de um grande número de finas partições, como mostra a Figura 8. O momento de cada uma dessas finas partições próximas do ponto $o$ é igual à soma dos momentos correspondentes das finas partições da esfera e do cone.

Figura 8

A soma dessas finas partições produzirá o cilindro, a esfera e o cone. Então, com base nessa comparação, Arquimedes conclui que o momento do cilindro próximo do ponto de apoio *o* é igual à soma dos momentos da esfera e do cone próximos do ponto de apoio *o*.

A força da gravidade sobre um sólido simétrico pode ser considerada como a que atua em seu centro geométrico. O centro do cilindro está a *r* unidades do ponto de apoio *o*. Os centros da esfera e do cone estão sobre uma linha vertical a uma distância $2r$ do ponto de apoio *o*.

Arquimedes estabelece, provisoriamente, que o volume de um cone é um terço do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura. Esse resultado, conforme salienta em *O Método*, foi enunciado por Demócrito de Abdera[29] (470-380 a.C.) e estabelecido por Eudoxo de Cnido:

> [...] acerca do cone e da pirâmide, de que Eudoxo foi o primeiro a encontrar a demonstração, que o cone é a terça parte do cilindro e a pirâmide a terça do prisma tendo a mesma base e igual altura, convém atribuir-se uma pequena parte a Demócrito, que primeiro enunciou sem demonstração acerca das ditas figuras. (Arquimedes,1971, p.168, tradução nossa, ver Anexo)

Desse modo, denominando o volume da esfera $V_e$ e o volume do cone $V_k$, tem-se que o volume do cilindro é $3V_k$.

Assim, as massas da esfera, cone e cilindro são $V_e$, $V_k$ e $3V_k$, respectivamente. Tomando momentos próximos do ponto de apoio *o*, tem-se: $3V_k r = (V_e 2r + V_k 2r) = (V_e + V_k)2r$, então $V_e = \frac{V_k}{2}$.

O volume do cilindro é $3V_k = \pi(2r)^2\,(2r) = 8\pi r^3$. Portanto, $V_k = \frac{8}{3}\pi r^3$.

Consequentemente, $V_e = \frac{V_k}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

29 Antiga cidade da Trácia (região do norte da Macedônia).

# 4
# VESTÍGIOS DE HEURÍSTICA EM *A COLEÇÃO MATEMÁTICA* DE PAPPUS

*Chega-se muitas vezes a belas verdades por meio da síntese, indo do simples ao composto, mas quando é preciso encontrar o meio de fazer aquilo que se propõe, a síntese normalmente não basta [...] e cabe à análise dar-nos o fio condutor, quando isso é possível, porque há casos em que a natureza do problema exige que se proceda tateando, e nem sempre é possível cortar caminho.*

Leibniz, *Nouveaux Essais Sur L'Entendement Humain,* 1703

Dentre os sucessores imediatos de Euclides de Alexandria (330-275 a.C.) estão Arquimedes (287-212 a.C.), Apolônio de Perga (250-170 a.C.), Hiparco (190-120 a.C.), Gémino de Rodes (10 a.C. – 60 d.C.), Herão de Alexandria (10-75 d.C.), Nicômaco de Gerasa (50-110 d.C.) e Menelau (70-130 d.C.), Cláudio Ptolomeu (100-168 d.C.), que tentaram dar continuidade às tradições geométricas gregas estabelecidas pelos matemáticos da primeira fase da Escola de Alexandria (300 a 30 a.C.). Mesmo com o desenvolvimento de novos ramos da Matemática, tais como trigonometria, astronomia e álgebra, os matemáticos da segunda fase da Escola de Alexandria

(30 a.C. a 641 d.C.) não conseguiram excluir essa ciência do declínio da cultura grega. Convém salientar um último matemático importante vinculado à Escola de Alexandria por volta do século III d.C.: Pappus de Alexandria.

Ainda que não se tenha conhecimento de muitas de suas obras e um comentário feito sobre o Livro X de *Os Elementos* só seja conhecido mediante uma tradução árabe, deve-se a Pappus a organização de uma obra importante composta originalmente por oito livros, chamada *A coleção matemática*,[1] que é um resumo de alguns dos conhecimentos dos geômetras gregos anteriores, acrescido de interessantes comentários e novas proposições, com indicações e numerosos esclarecimentos significativos, correções e críticas. Provavelmente, esse trabalho fora uma espécie de resumo com o intuito de facilitar o estudo dos tratados dos matemáticos anteriores. De acordo com Ver Eecke (1982, p.13-4),

> a obra capital de Pappus é esta que nos foi preservada sob o título de *A coleção matemática*. Ela constitui uma vasta coletânea de proposições extraídas de um grande número de obras, quase todas hoje perdidas, a qual, longe de apresentar o caráter de uma compilação ordinária, ultrapassa o limite de um simples comentário. Pappus não se limita, com efeito, a expor notáveis proposições devidas a seus antecessores acompanhando-as de uma grande quantidade de lemas destinados a esclarecer as passagens difíceis das suas demonstrações, mas ele estabelece frequentemente demonstrações diferentes; ele as estende a casos particulares ou análogos, aplica-as à solução de problemas novos ou já resolvidos anteriormente de outra maneira, e completa numerosas proposições inteiramente novas extraídas de seu próprio cabedal, que indicam pesquisas já muito avançadas no que chamamos agora geometria superior. A obra não parece ter sido concebida seguindo um plano determinado. Se bem que uma parte seja consagrada exclusivamente às questões astronômicas, que outra

1 Segundo seu tradutor e historiador da Matemática, Paul ver Eecke, a maioria dos manuscritos, sobretudo os mais antigos, são intitulados simplesmente *A coleção* (συναγωγή), ao passo que as cópias posteriores trazem um título mais completo no plural: *As coleções matemáticas* (μαθηματιχαὶ συναγωγαί).

> afirme a ideia de tratar metodicamente as propriedades comparativas das superfícies planas de mesmo perímetro e das figuras sólidas de mesma superfície e que uma terceira parte vise particularmente às questões de mecânica pura e aplicada, todo o resto apresenta-se como uma justaposição de questões geométricas das mais diversas, não tendo quase nenhuma ligação entre elas. A falta de unidade na obra e esta ausência de coordenação entre suas diversas partes dão a impressão que ela foi escrita no curso de vários anos, conforme lembranças duráveis das lições que o último mestre ministrou à Escola de Alexandria, quando chamado a lecionar diante de um auditório no qual a tradição científica começava a se perder e ao qual era necessário então rememorar a fecundidade dos métodos dos antigos geômetras, expor suas principais descobertas e facilitar a compreensão por meio de numerosos lemas auxiliares, não demonstrados explicitamente na obra clássica de *Os Elementos* de Euclides.

Ainda assim, *A coleção matemática* de Pappus tem um valor inestimável pelas informações históricas e bibliográficas que contém com relação à matemática grega.

Considerando o intuito deste livro, dentre os livros de *A coleção matemática* foca-se a análise no Livro VII, por seu valor do ponto de vista histórico e, em particular, por abordar e conceituar os aspectos referentes à análise e síntese, que fornecem subsídios à atividade heurística. O livro, dedicado ao seu filho Hermodoro, é composto por uma série de obras de autores gregos anteriores, com o objetivo de disponibilizar procedimentos que pudessem ser úteis na resolução dos problemas geométricos àqueles alunos que já haviam adquirido o domínio da geometria, mediante o estudo de seus elementos.

No prefácio do Livro VII de *A coleção matemática* de Pappus, pode-se ler o seguinte:

> Contendo os lemas do lugar resolvido
>
> O chamado "tesouro da análise", meu filho Hermodoro, em resumo, é uma matéria particular para os que querem, depois da

produção dos elementos comuns, tomar a si a faculdade inventiva, [de resolver] nas linhas, os problemas apresentados a eles, e sendo útil para isso apenas. E foi escrita por três homens, Euclides, o autor dos Elementos, e Apolônio de Perga, e Aristeu, o mais velho, a abordagem sendo segundo a análise e a síntese.

A análise, com efeito, é o caminho a partir do que é procurado, como aceito, por meio das sucessivas consequências, até algo aceito pela síntese. Visto que na análise, tendo (nós) estabelecido a coisa procurada como acontecida, consideramos isso que dela resulta e, de novo, o precedente daquela, até que assim voltando sobre nossos passos cheguemos a alguma das coisas já conhecidas ou que tem a ordem de princípios; e essa abordagem chamamos análise, como solução em sentido contrário. Ao passo que, na síntese, ao contrário, supondo o que foi deixado, por último, na análise, já acontecido, e tendo arranjado como consequências as coisas então precedentes, segundo sua natureza, e tendo adicionado umas às outras, chegamos, por fim, à construção da coisa procurada; e chamamos isso síntese.

Duplo é o gênero da análise, um a pesquisa do verdadeiro, o qual é chamado teórico, o outro capaz de dizer o que foi proposto, o qual é chamado problemático. Ao passo que no gênero teórico, tendo estabelecido o que é procurado como existente e verdadeiro, em seguida, por meio das consequências sucessivas como verdadeiras, e como existem segundo a hipótese, tendo avançado até algo admitido, caso, por um lado, fosse verdadeiro aquilo admitido, será verdadeiro também o procurado, e a demonstração é uma inversão da análise; caso, por outro lado, encontramos falso o admitido, falso será também o procurado. No gênero problemático, tendo estabelecido o que foi proposto como conhecido, em seguida, por meio das consequências sucessivas, como verdadeiras, tendo avançado até algo admitido, caso, por um lado, o admitido seja possível é obtenível, o que os matemáticos chamam dados, possível também será o proposto, e, de novo, a demonstração é uma inversão à análise; caso, por outro lado, encontramos impossível o admitido, impossível será também o problema.

Esse tanto, então, acerca da análise e da síntese.

E dos livros antes citados do tesouro da análise, o arranjo é como segue. Um livro dos *Dados* de Euclides, dois da *Seção de uma razão* de Apolônio, dois de *Seção de área*, dois de *Seção determinada*, dois do *Contatos*, três dos *Porisma* de Euclides, dois das *Inclinações* de Apolônio, dois dos *Lugares planos* do mesmo, oito das *Cônicas*, cinco dos *Lugares sólidos* de Aristeu, dois dos *Lugares à superfície* de Euclides, dois *Acerca das médias* de Eratóstenes. São 33 livros, dos quais te expus, para exame, os conteúdos até das *Cônicas* de Apolônio, e a multitude dos *Lugares* e das condições de possibilidade e dos casos, segundo cada livro, mas também os lemas procurados, e nenhum inquérito no tratamento dos livros deixei para trás, como pensava.[2]

Pode-se ler antes, conforme Pappus, que no campo da Matemática, as obras que tratam da *análise* geométrica utilizada pelos antigos geômetras gregos, caracterizada como um método para descobrir a solução ou a demonstração de problemas ou teoremas geométricos, isto é, uma forma de atividade heurística, desenvolvida por esses geômetras gregos, é o que constitui a chamada *Coleção analítica* dos antigos.

Fica explícito que os antigos geômetras utilizavam um procedimento heurístico para solucionar seus problemas matemáticos, isto é, um modelo matemático que utiliza a *análise* para *encontrar* a solução de um problema ou a demonstração de um teorema e, em seguida, a *síntese* para *expor* o que se encontrou para solucionar o problema ou a demonstração de um teorema; esses aspectos, analítico e sintético, permaneceram na Matemática de Euclides de Alexandria e nos trabalhos desenvolvidos por outros geômetras gregos contemporâneos e posteriores.

Antes de esquematizar esse procedimento heurístico, convém apresentar os tipos de problemas que eram estudados e resolvidos pelos antigos geômetras gregos. Assim, segundo Pappus,

---

2 Tradução feita do grego pelo professor Irineu Bicudo.

> os Antigos admitiam que os problemas pertencem à três gêneros geométricos: uns são chamados planos,[3] outros sólidos[4] e outros ainda *gramicas*.[5] Chama-se, com justo título, planos os que podem ser resolvidos por meio de linhas retas e de circunferência de círculo; porque, as linhas por meio das quais os problemas desse gênero são resolvidos encontram sua origem no plano. Quanto aos problemas cuja solução invoca uma ou várias seções de cone, são chamados sólidos; uma vez que é necessário fazer uso de superfícies de figuras sólidas para sua construção, notadamente de superfícies cônicas. Por fim, o terceiro gênero de problemas é chamado *gramicas*, porque além das linhas que acabamos de citar, eles admitem outras para sua construção, cuja origem é muito variada e muito complexa, tais como as espirais, as quadratrizes, as concoides e as cissoides que possuem propriedades numerosas e admiráveis. (ibidem, 38-9, tradução nossa)

Também é necessário distinguir problemas de teoremas, conforme concepção dos antigos geômetras, segundo o que foi exposto por Proclus (apud Vera, 1970, p.1164-5):

> [...] é evidente que há certa diferença entre o problema e o teorema e que as lições dos elementos de Euclides têm problemas e teoremas, diferença que se observa em cada proposição considerada em particular e no fato de que o próprio Euclides agrega "o que era necessário fazer" ao final dos objetos buscados e "o que era necessário demonstrar" que caracteriza os teoremas. Também há demonstrações nos problemas, como dissemos, mas isto ocorre quando se quer comprovar uma construção ou quando a demonstração é digna de atenção por si mesma e susceptível de destacar a natureza do objeto que se busca.

3 τὰ ἐπίπεδα προβλήματα, os problemas planos.

4 τὰ στέρεα προβλήματα, os problemas sólidos.

5 τὰ γράμμικα προβλήματα, os problemas lineares ou *gramicas*, segundo o neologismo introduzido por Tannery. O adjetivo grego γραμμικός, ή, όν é derivado do substantivo γραμμή, linha, e significa "concernente a linhas".

Atualmente, um problema matemático pode ser caracterizado como uma situação que requer uma ou várias realizações de uma sequência de procedimentos mentais para encontrar um resultado satisfatório com o caráter do problema; entretanto, poderá ocorrer que a solução de um problema, na maioria das vezes, não se encontre inicialmente à disposição do indivíduo, mas será possível, por meio de um procedimento, construir a solução desejada.

Com relação à obtenção da solução de um problema, frequentemente se pode "adivinhá-la", utilizando intuições, inferências, induções e baseando-se em analogias com outros problemas resolvidos – não se pode negar que, talvez por esses fatos, foram alcançados resultados importantes, como se verifica no desenvolvimento das ideias Matemáticas, mas, apesar de ser excelente, tal adivinhação (predição) não é um método científico: em todo tratamento metódico, importa analisar as condições impostas pelos dados coletados do problema e é necessário, primeiramente, ter bem claro ao espírito aquilo que se alcançou com a imaginação, então supondo o problema resolvido.

Adota-se então um procedimento heurístico segundo regras que se experimentam de problemas análogos ao problema de que se quer a solução. A *análise* consiste em resolver um problema admitindo o resultado que se quer demostrar como verdadeiro, buscando, em seguida, um antecedente do qual seja possível deduzir o resultado que se quer demonstrar e que foi admitido como verdadeiro. Repetindo esse processo de regressão sucessivamente se busca chegar a algum resultado que já se conhece ou se admite como válido.

Polya (1994, p.104) afirma:

> Na análise, começamos por aquilo de que se precisa e que admitimos como certo e extraímos consequências disso e consequência das consequências até chegarmos a um ponto que podemos usar como de partida da síntese. Porque na análise admitimos que o que precisa ser feito já o foi (o que se procura já foi encontrado, o que se tem a demonstrar é verdadeiro). Indagamos de qual antecedente poderá ser deduzido o resultado desejado; em seguida, indagamos

> de novo qual poderá ser o antecedente desse antecedente e assim por diante, até chegarmos finalmente a algo que já conhecemos ou que admitimos como verdadeiro. A este procedimento chamamos análise, ou regressão ou raciocínio regressivo.

A *síntese* consiste em realizar esta solução, isto é, em determinar as quantidades e as figuras procuradas de maneira a satisfazer às condições requeridas e transformadas; em seguida, é necessário mostrar que as condições primitivamente postas são, também, satisfeitas. Pela falta de um procedimento mais simples, esta demonstração opera-se, regra geral, por uma transformação das condições segundo uma ordem inversa daquela que se observaria na *análise*, para concluir que as condições novas podem auxiliar a verificar se as condições primitivas também ficarão completas. Além disso, esse procedimento, servindo-se da transformação reversível, possibilita concluir que as novas condições requeridas sejam as condições não somente necessárias, mas suficientes das condições primitivas. Ainda conforme Polya (ibidem, p.104):

> Mas na síntese, invertendo o processo, partimos do último ponto a que chegamos na análise, daquilo que já sabemos ou admitimos como verdadeiro. Disso deduzimos o que o procedeu na análise e continuamos a fazer deduções até que, percorrendo o mesmo caminho no outro sentido, conseguimos finalmente chegar aonde queríamos. A este procedimento chamamos síntese, ou resolução construtiva ou raciocínio progressivo.

Como já foi discutido, os antigos geômetras diferenciavam problemas de teoremas; na versão livre que Polya faz do texto de Pappus, verifica-se que este último fazia uma distinção entre o processo de análise aplicado a *problemas de demonstração* e a *problemas de determinação*.

> Quando se trata de um "problema de demonstração", temos de demonstrar ou refutar um teorema claramente enunciado *A*.

> Não sabemos ainda se *A* é verdadeiro ou falso, mas deduzimos de *A* um outro teorema *B*, de *B* um outro *C* e assim sucessivamente, até chegarmos a um último teorema *L*, acerca do qual temos um conhecimento definitivo. Se *L* for verdadeiro, *A* também será, desde que todas as nossas deduções sejam conversíveis. Tomando-se por base *L*, deduzimos o teorema *K*, que precedeu *L* na análise e, procedendo da mesma maneira, retrocedemos: de *C* demonstramos *B*, de *B* demonstramos *A* e assim chegamos ao nosso objetivo. Se, porém *L* for falso, teremos demonstrado que *A* é falso.
>
> Tratando-se de um "problema de determinação", temos de encontrar uma certa incógnita *x* que satisfaça uma condicionante claramente enunciada. Não sabemos ainda se é possível que alguma coisa satisfará ou não a condicionante. Mas, admitindo que há um valor de *x* que satisfaz a condicionante, dela deduzimos uma outra incógnita *y* que tem de satisfazer uma condicionante correlata. Em seguida, correlacionamos *y* com uma nova incógnita e assim sucessivamente, até chegarmos a uma última incógnita *z* que podemos encontrar por algum método conhecido. Se realmente houver um *z* que satisfaça a condicionante a ele imposta, haverá também um *x* que satisfará a condicionante original, desde que todas as nossas deduções forem conversíveis. Encontramos primeiro *z*; em seguida, conhecendo *z*, encontramos a incógnita que precedeu *z* na análise; procedendo da mesma maneira, retrocedemos e finalmente, conhecendo *y*, obtemos *x*, que é o nosso objetivo. Se, porém, nada houver que satisfaça a condicionante imposta a *z*, o problema relativo a *x* não tem solução. (ibidem, p.104)

Utilizando a *síntese* para *expor* o que se encontrou para solucionar um problema ou demonstrar um teorema, os antigos geômetras dividiam o problema (ou teorema) e sua solução (ou demonstração) em seis partes, a saber, *protasis* (πρότασις), *ekthasis* (ἔκθεσις), *diorismós* (διορισμός), *kataskeue* (χατασχενή), *apodeixis* (απόδειξις) e *sumperasma* (συμπέρασμα).

1. *Protasis* – é o enunciado da proposição.
2. *Ekthasis* – é o que é dado no enunciado da proposição.

3. *Diorismós* – é o que se pede no enunciado da proposição.
4. *Kataskeue* – é a construção geométrica da proposição.
5. *Apodeixis* – é a demonstração da proposição.
6. *Sumperasma* – é a conclusão da proposição.

Para exemplificar esse modelo matemático será considerada a Proposição 1, Livro IV, de *Os elementos* de Euclides:[6]

> Ajustar, no círculo dado, uma reta igual à reta dada, que não é maior do que o diâmetro do círculo.
> Sejam o círculo dado ABC, e a reta dada D, não maior do que o diâmetro do círculo; é preciso, então, ajustar no círculo ABC uma reta igual à reta D. Fique traçado o diâmetro BC do círculo ABC. Se, por um lado, de fato, a BC é igual à D, seria produzido o prescrito; pois a BC, igual à reta D, foi ajustada no círculo ABC. Se, por outro lado, a BC é maior do que a D, fique posta a CE igual à D, e, com o centro C e a distância CE, fique descrito o círculo EAF, e fique ligada a CA. Como, de fato, o ponto C é centro do círculo EAF, a CA é igual à CE. Mas a CE é igual à D; portanto, também a D é igual à CA.
> Portanto, no círculo dado ABC, foi ajustada a CA igual à reta dada D; o que era preciso fazer. (Euclides, 2009, p.188)

*Protasis*

Ajustar, no círculo dado, uma reta igual à reta dada, que não é maior do que o diâmetro do círculo.

*Ekthasis*

Sejam o círculo dado ABC, e a reta dada D, não maior do que o diâmetro do círculo;

*Diorismós*

É preciso, então, ajustar no círculo ABC uma reta igual à reta D.

---

6 Tradução feita do grego pelo prof. dr. Irineu Bicudo.

*Kataskeue*

Fique traçado o diâmetro BC do círculo ABC. Se, por um lado, de fato, a BC é igual à D, seria produzido o prescrito; pois a BC, igual à reta D, foi ajustada no círculo ABC. Se, por outro lado, a BC é maior do que a D, fique posta a CE igual à D, e, com o centro C e a distância CE, fique descrito o círculo EAF, e fique ligada a CA.

*Apodeixis*

Como, de fato, o ponto C é centro do círculo EAF, a CA é igual à CE. Mas a CE é igual à D; portanto, também a D é igual à CA.

*Sumperasma*

Portanto, no círculo dado ABC, foi ajustada a CA igual à reta dada D; o que era preciso fazer.

Em sua obra *A coleção matemática,* Pappus estabelece a solução ou demonstração de alguns problemas ou teoremas pelo método da *análise*, expondo-a, em seguida, por intermédio da *síntese,* como no Livro III, Proposições 54, 55, 56, 57 e 58 e no Livro IV, Proposições 4, 13, 33, 34, 37 e 40. Como exemplo, será considerada a Proposição 37 do Livro IV:

Que seja necessário estabelecer um triângulo isósceles em que cada um dos ângulos à base tenha uma relação (razão) com o ângulo restante.

Que o fato seja obtido e seja ABΓ o triângulo assim estabelecido. Descrevemos, em torno do ponto B como centro, o círculo AΓΔ passando pelos pontos A, Γ; prolonguemos a reta AB até o ponto Δ, e traçamos a reta por junção ΔΓ. Desde então, uma vez que a relação (razão) do ângulo compreendido sob as retas ΓA, AB para o ângulo compreendido sob as AB, BΓ está dado, e que o ângulo no ponto Δ é a metade do ângulo compreendido sob as retas AB, BΓ, em seguida que a relação (razão) do ângulo compreendido sob as retas ΓA, AΔ para o ângulo compreendido sob as retas AΔ, ΔΓ está dado assim; de

tal modo que a relação (razão) do arco ΔΓ para o arco ΑΓ está dada assim (Euclides, Livro VI, proposição 33). Por conseguinte, uma vez que o arco do semicírculo ΑΓΔ está cortado numa relação (razão) dada, [o ponto Γ está dado] e o triângulo ΑΒΓ está dado de espécie.[7]

A síntese se fará da seguinte maneira: que a relação (razão) que deve ter cada um dos ângulos à base com o ângulo restante seja o de uma reta EZ para uma reta ZH; cortamos a reta ZH em duas partes iguais no ponto Θ, e colocamos o círculo ΑΔΓ em torno do ponto B como centro e a reta ΑΔ como diâmetro. Cortamos o arco ΑΓΔ no ponto Γ de maneira que o arco ΔΓ esteja para o arco ΓΑ como a reta EZ está para a reta ZΘ (uma vez que isso foi exposto precedentemente) e traçamos as retas por junção ΒΓ, ΓΑ, ΓΔ. Desde então, uma vez que o arco ΔΓ está para o arco ΓΑ, isto é, que o ângulo compreendido sob as retas ΔΑ, ΑΓ está para o ângulo compreendido sob as retas ΑΔ, ΔΓ, como a reta EZ está para a reta ZΘ e, considerando as duplas consequências, em seguida que o ângulo compreendido sob as retas ΓΑ, ΑΒ está para o ângulo compreendido sob as retas ΑΒ, ΒΓ como a reta EZ está para a reta ZH.[8] Por conseguinte, tem-se estabelecido o triângulo isósceles ΑΒΓ em que cada um dos ângulos à base tem uma relação (razão) dada com o ângulo restante. (Pappus, 1982, p.225-6)

7 O semicírculo ΑΓΔ sendo cortado numa relação (razão) dada ao ponto Γ, os ângulos ao centro ΑΒΓ, ΓΒΔ estão na mesma relação (razão); já que esses ângulos são dados (Euclides, *Dados*, Proposição 7, Enunciado, p.28, nota 4). Ora, cada um dos ângulos à base do triângulo ΑΒΓ vale a metade do ângulo ΓΒΔ; já que, o triângulo ΑΒΓ está dado de espécie, porque a reta B está dada por posição. Cf. Prefácio de Eecke, in Pappus, 1982.

8 Obtém-se, após a Proposição 35: $\frac{arc\Delta\Gamma}{arc\Gamma A} = \frac{EZ}{Z\Theta}$. Ora, $\frac{\Delta\hat{A}\Gamma}{A\hat{\Delta}\Gamma} = \frac{arc\Delta\Gamma}{arcA\Gamma}$, porque: $\frac{\Delta\hat{A}\Gamma}{A\hat{\Delta}\Gamma} = \frac{EZ}{Z\Theta}$, em que: $\frac{\Delta\hat{A}\Gamma}{2A\hat{\Delta}\Gamma} = \frac{EZ}{2Z\Theta}$ ou: $\frac{\Delta\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}B}{A\hat{B}\Gamma} = \frac{EZ}{ZH}$.

# 5
# Regras para a atividade heurística em Descartes

*A leitura de todos os bons livros é como uma conversa com os melhores espíritos dos séculos passados, que foram seus autores, e até uma conversa estudada, em que eles só nos descobrem seus melhores pensamentos.*

Descartes, *Discurso do Método*, 1637

No começo do século XVII, um número cada vez maior de homens da ciência participou no desenvolvimento da Matemática, Filosofia e Ciências Naturais e tentou comunicar-se com os demais, com o propósito de intercâmbio de informações e confronto de ideias para, com isso, estimular sua própria motivação no intuito de produzir progressos nessas áreas do saber. Além disso, esta atividade científica e cultural quase secreta e reservada conduziu à fundação de sociedades voltadas para isso e, inicialmente com a ausência de revistas científicas, a um grande número de correspondências. Essas sociedades científicas foram fundadas com base nas reuniões promovidas por esses eruditos: na Itália a *Academia dei Lincei* em 1603, na Inglaterra a *Royal Society of London* em 1662, na França a *Académie Royale des Sciences* em 1666 e na Alemanha a Academia de Berlim em 1700.

Essa época é repleta de controvérsias que envolvem os matemáticos em polêmicas pessoais, que pretendem pôr em dúvida a veracidade dos resultados obtidos e a paternidade das descobertas matemáticas. Nesse período cultural intenso viveu o matemático, filósofo e físico René Descartes (1596-1650).

Sua educação ficou sob a direção de um colégio de jesuítas, célebre pela organização de seu ensino em Humanidades. Ao longo de sua vida, Descartes continuou aperfeiçoando-se nas ciências e na filosofia, e um de seus objetivos era a elaboração de um método[1] geral matemático-dedutivo para o estudo de questões das Ciências Naturais. Desse modo, dedica-se a alguns dos problemas científicos e filosóficos de sua época. Para tal intuito,

> Descartes procurou uma base para a verdade. Segundo seu raciocínio, o indivíduo deve partir de premissas que não possam ser contestadas. Parecia-lhe que a Matemática fornecia tais premissas. Via, nela, o modelo do raciocínio exato, o método de raciocinar com base em verdades evidentes. Parecia-lhe este o método pelo qual se pode obter o verdadeiro conhecimento. Procurou, então, primeiramente, as verdades evidentes por si mesmas. A única que descobriu foi: penso, logo existo. Tomando-a como base, formulou um corpo de ideias que acreditava não pudessem ser contestadas. Tais ideias, para ele, eram claras, distintas e, portanto, verdadeiras e fora de discussão.
>
> Descartes estabeleceu, como princípio fundamental do pensamento, que todas as ideias verdadeiras devem ser claras e distintas. O espírito tem suas normas claras e distintas, normas que lhe são dadas em virtude de sua natureza. Assim, o conhecimento vem ao homem – argumentava – não pela percepção dos sentidos, mas mediante cuidadoso raciocínio, partindo-se de premissas

---

1 Conforme Abbagnano (1999, p.668), "este termo tem dois significados fundamentais: 1º qualquer pesquisa ou orientação de pesquisa; 2o uma técnica particular de pesquisa. No primeiro significado, não se distingue de 'investigação' ou 'doutrina'. O segundo significado é mais restrito e indica um procedimento de investigação organizado, repetível e autocorrigível, que garanta a obtenção de resultados válidos".

fundamentais; cada ideia pode ser aceita se, após ser deduzida logicamente, é clara e distinta. (Frost, 1985, p.256)

Segundo Sciacca (1967, p.77), Descartes escreveu, entre outras obras: *Regulae ad directionem ingenii* (1626), publicação póstuma; *Tratado do mundo da luz* (1633), que em razão da condenação de Galileu, foi publicado, em 1637, em três partes separadas (*A dióptrica, Os meteoros* e *A geometria*); *Discurso do método* (1637); *Meditationes de prima philosophia* (1644), publicada com as objeções formuladas por, entre outros, Arnauld, Gassendi, Hobbes e as suas respostas a essas objeções; *Principia philosophiae* (1644), tratado em que apresenta sua doutrina; *As paixões da Alma* (1649).

Neste livro será analisada e discutida sua obra *Regulae ad directionem ingenii* (Regras para a direção do espírito), tomando por base a tradução em português do texto em francês *Règles pour la direction de l'esprit*. O texto em língua francesa é uma tradução do original em latim feita por J. Sirven.

A obra está dividida em três capítulos, segundo o projeto de Descartes; no entanto, ele concluiu somente o primeiro e parte do segundo capítulo. O primeiro capítulo é composto por doze regras e do segundo tem-se nove regras das doze previstas.

Na *Regra I*,[2] Descartes deixa explícito que o método é necessário na pesquisa para conhecer a verdade;[3] porém, para realizar uma análise das regras que compõem as *Règles pour la Direction de L'esprit* deve ser considerada a época de Descartes, visto que o homem necessita ter ideias clara e exatas, para mostrar que o domínio do mundo em que ele vive depende de uma exata compreensão dos fatos

2 "Chama-se regra qualquer proposição de natureza prescritiva" (Abbagnano, 1999, p.840).

3 Segundo Abbagnano (1999, p.994), "validade ou eficácia dos procedimentos cognoscitivos. Em geral, entende-se por verdade a qualidade em virtude da qual um procedimento cognoscitivo qualquer torna-se eficaz ou obtém êxito. Essa caracterização pode ser aplicada tanto às concepções segundo as quais o conhecimento é um processo mental quanto às que o consideram um processo linguístico ou semiótico".

desse mundo. Desse modo, deve-se fazer observações minuciosas e colher todos os dados possíveis para, deles, tirar conclusões e hipóteses que devem ser verificadas por outros dados que, posteriormente, podem ser colhidos.

> Os estudos devem ter por fim dar ao espírito uma direção que lhe permita dirigir julgamentos sólidos e verdadeiros sobre tudo o que se lhe apresenta.[4] (Descartes, 1908, p.1, tradução nossa)
>
> Que pense somente em desenvolver a luz natural da sua razão, não para resolver esta ou aquela dificuldade escolar, mas para que, em cada circunstância da sua vida, seu entendimento mostre à sua vontade o que é necessário escolher. Logo, estará espantado por ter feito progressos bem superiores àqueles dos homens que se aplicam a estudos especiais e por ter chegado não somente a possessão de tudo o que os outros desejam, mas ainda de coisas mais elevadas que aquelas que eles podem se permitir esperar.[5] (ibidem, p.4, tradução nossa)

Na *Regra II*,

> Os objetos dos quais é necessário nos ocuparmos são só aqueles que aos nossos espíritos parece ser suficiente conhecer de uma maneira certa e indubitável.[6] (ibidem, p.5, tradução nossa)

---

4 *"Les études doivent avoir pour but de donner à l'esprit une direction qui lui permette de porter des jugements solides et vrais sur tout ce qui se présente à lui."*

5 *"Qu'il pense seulement à accroître la lumière naturelle de sa raison, non pour résoudre telle ou telle difficulté d'école, mais pour que, dans chaque circunstance de sa vie, son entendement montre à sa volonté ce qu'il faut choisir. Bientôt, il sera tout étonné d'avoir fait des progrès bien supérieurs à ceux des hommes qui s'appliquent à des études spéciales, et d'être arrivé, non seulement à la possession de tout ce que les autres désirent, mais encore de choses plus élevées que celles qu'ils peuvent se permettre d'espérer."*

6 *"Les objets dont il faut nous occuper sont ceux-là seuls que nos esprits paraissent suffire à connaître d'une manière certaine et indubitable."*

Na *Regra III*, Descartes introduz operações, segundo ele, importantes para a aquisição do conhecimento verdadeiro, isto é, a intuição e a dedução.[7]

> Para não cair, no período que se segue, no mesmo erro, eis aqui o recenseamento de todos os atos de nossa inteligência que nos permitem chegar ao conhecimento das coisas, sem receio de nos enganarmos. Deles não há senão dois a admitir, a saber, a intuição e a dedução.[8] (ibidem, p.13, tradução nossa)

Além disso, Descartes busca ser preciso ao atribuir à palavra intuição[9] o seu significado em latim, isto é, o ato de contemplar, e conforme se observa no texto, fica explícito que se está falando em intuição intelectual, que será abordada posteriormente.

Assim, primeiramente, explica-se o que está sendo entendido como intuição, segundo as asserções dessa regra. Como se poderá verificar posteriormente na citação, a intuição ou método intuitivo possibilita, em primeiro lugar, um caminho para obter o conhecimento verdadeiro de algo, e esse se contrapõe ao conhecimento discursivo, ou seja, o seu tipo é o raciocínio. Com efeito, para compreender o que é o método intuitivo convém expô-lo em oposição ao método discursivo.

O método discursivo expressa a ideia de uma série de atos que se dirigem para captar a essência do objeto (aquilo que existe ou pode existir); consequentemente, o conhecimento discursivo é um conhecimento que atingirá o objetivo preestabelecido quando se completar

7 Relação pela qual uma conclusão deriva de uma ou mais premissas (Abbagnano, 1999).

8 *"Pour ne pas tomber par la suite dans la même erreur, voici le recensement de tous les actes de notre entendement qui nous permettent de parvenir à la connaissance des choses, sans crainte de nous tromper. Il n'y en a que deux à admettre, savoir l'intuition e la déduction."*

9 *Inueor, -eris, -eri, -tuitus sum*; verbo transitivo e intransitivo. I – Sentido próprio: 1) Fixar o olhar em, olhar atentamente (Cícero – Brutus, 331). II – Sentido figurado: 2) Considerar atentamente (Cícero – Orator, 24), 3) Contemplar (Cícero – De Império Gn. Pompei ou Pro Lege Manilia, 41).

uma série de esforços consecutivos que consistem em estabelecer, mediante o agrupamento de sucessivas informações, proposições que serão contestadas, examinadas, reexaminadas, reformuladas e transformadas em outras novas proposições. Esta síntese tentará incluir em um único grupo a essência do objeto pesquisado.

Portanto, em contraposição a esse método discursivo encontra-se o método intuitivo. Este último consiste numa única ação da mente que, num impulso instantâneo, tendo se dirigido ao objeto a ser examinado, subitamente o compreende, determina-o com uma só contemplação da mente. Por conseguinte, o que caracteriza e evidencia o método intuitivo é seu modo direto de procedimento. Então, conforme Descartes, por meio da intuição obtém-se um conhecimento imediato.

Porém, há a necessidade de explicitar que intuição e discurso[10] estão constantemente associados no ato do pensamento. De fato, todo trabalho mental parte de uma intuição para chegar a outra intuição, por intermédio do discurso. No princípio do conhecimento há objetos a pesquisar e noções dos objetos a ser pesquisadas, apreendidas por uma intuição. Assim, com base nesses objetos primitivos, é estabelecido um trabalho discursivo, que tem por propósito examinar, determinar e descobrir a ordem das noções e suas razões de ser, estabelecendo-se um ato verdadeiro pelo qual um sujeito apreende o objeto. Com efeito, esse procedimento tende a delimitar uma nova intuição, que proporciona a cada estágio uma imagem fidedigna do objeto investigado.

> Por intuição, entendo não a confiança flutuante que dão os sentidos ou o julgamento enganador de uma imaginação com más construções, mas o conceito que a inteligência pura e atenta forma com tanta facilidade e distinção que não resta absolutamente nenhuma dúvida sobre aquilo que compreendemos; ou então, o que é a mesma

10 Conjunto de expressões e frases dispostas com certa ordem e extensão, pelas quais alguém declara por escrito ou em público o que pensa a respeito de um assunto (Abbagnano, 1999).

> coisa, o conceito que forma a inteligência pura e atenta, sem dúvida possível, conceito que nasce somente da luz da razão e cuja certeza é maior, por causa de sua maior simplicidade, que a da própria dedução, ainda que essa última não possa ser mal feita mesmo pelo homem, como notamos mais acima. Assim, cada um pode ver por intuição intelectual que existe, que pensa, que um triângulo é limitado somente por três linhas, um corpo esférico por uma só superfície e outros fatos semelhantes que são muito mais numerosos do que a maioria observa, em consequência do desdém que experimentam em voltar as sua inteligências para coisas tão fáceis.[11] (ibidem, p.14-5, tradução nossa)

Descartes faz ainda algumas ressalvas quanto ao significado atribuído a alguns termos.

> Além disso, com medo que por acaso fique chocado com o novo emprego da palavra intuição e das outras que a seguir serei forçado a desviar igualmente do seu significado ordinário, aqui faço uma advertência geral. Não penso de modo nenhum na maneira como cada expressão nesses últimos tempos foi empregada nas escolas, porque haveria uma extrema dificuldade em querer servir-me desses nomes para exprimir ideias profundamente diferentes; mas atenho-me unicamente ao significado de cada palavra em latim, para que, à falta

---

11 *"Par intuition, j'entends, non la confiance flottante que donnent les sens ou le jugement trompeur d'une imagination aux constructions mauvaises, mais le concept que l'intelligence pure et attentive, forme avec tant de facilité et de distinction qu'il ne reste absolument aucun doute sur ce que nous comprenons; ou bien, ce qui est la même chose, le concept que forme l'intelligence pure et attentive, sans doute possible, concept qui naît de la seule lumière de la raison et dont la certitude est plus grande, à cause de sa plus grande simplicité, que celle de la déduction elle-même, bien que cette dernière ne puisse pas être mal faite même par l'homme, comme nous l'avons noté plus haut. Ainsi, chacun peut voir par intuition intellectuelle qu'il existe, qu'il pense, qu'un triangle est limité par trois lignes seulement, un corps sphérique par une seule surface, et autres faits semblables qui sont beaucoup plus nombreux que la plupart ne le remarquent, par suite du dédain qu'ils éprouvent à touner leur intelligence vers des choses si faciles."*

de termos próprios, eu tome cada vez, para traduzir a minha ideia, os que me parecem melhor lhe convir.[12] (ibidem, p.15, tradução nossa)

Além de estabelecer o que está sendo entendido como intuição, conforme proposto por Descartes, é necessário explicitar o significado da intuição intelectual exposta por ele. Para tal propósito, contrapor-se-á esta última à intuição sensível, que se caracteriza como o primeiro exemplo de intuição e que se realiza a cada instante. Assim, quando com um só olhar capta-se um objeto, por exemplo, um livro, tem-se um tipo de intuição imediata, isto é, uma comunicação (relação) estritamente direta entre observador e o objeto. Esta intuição sensível não pode ser a intuição de que se servirá Descartes para construir o seu sistema filosófico e, consequentemente, a utilizada em seu método intuitivo para a busca da verdade por duas razões fundamentais: a primeira é que a intuição sensível somente se aplica a objetos que se apresentam aos sentidos, e, dessa forma, só é aplicável e válida para aqueles casos em que, mediante as sensações, os objetos são diretamente transmitidos ao observador. A segunda é que a intuição sensível não propicia o conhecimento do objeto a ser pesquisado, porque essa intuição se encaminha a um único objeto, isto é, àquele que está diante do espaço de percepção dos sentidos do observador. Com efeito, essa segunda consideração mostra o caráter individual da intuição sensível. Portanto, a intuição sensível, que está vinculada ao caráter singular do objeto, não poderá servir ao sistema filosófico inerente ao método cartesiano.

---

12 *"Au rest, de peur que hasard on ne soit choqué par l'emploi nouveau du mot intuition et des autres que par la suite je serai forcé de détourner pareillement de leur signification ordinaire, je fais ici un avertissement général. Je ne pense pas du tout á la manière dont chaque expression en ces derniers temps a été employée dans les école, parce qu'il y aurait une extrême diffculté à vouluir se servir des mêmes noms pour exprimer des idées profondément différentes; mais je m'en tiens uniquement à la signification de chaque mot em latin, afin qu'à défaut de termes propres, je prenne chaque fois pour traduire mon idée ceux qui me semblent lui convenir le mieux."*

Diante dessas reflexões, pode-se dizer que, ao proceder ao ato intuitivo, o observador coloca em jogo suas faculdades intelectuais, tendo-se dessa forma a intuição intelectual.

> Agora podemos perguntar-nos porque acrescentamos aqui à intuição um outro modo de conhecimento consistindo na dedução, pela qual entendemos toda a conclusão necessária tirada de outras coisas conhecidas com certeza. Foi necessário fazê-lo, porque sabemos a maior parte das coisas de uma maneira certa sem que elas sejam evidentes, contando que somente se as conduza de princípios verdadeiros e conhecidos, por meios de um movimento contínuo e sem nenhuma interrupção de pensamento, o qual vê nitidamente por intuição cada coisa em particular. Não é de outro modo que conhecemos o liame que une o último anel de uma cadeia ao primeiro, ainda que um único e mesmo golpe de vista seja incapaz de nos fazer compreender intuitivamente todos os anéis intermediários que constituem esse liame: basta que os tenhamos percorridos sucessivamente e que guardemos a recordação que cada um deles, do primeiro ao último, tem aos que estão mais próximos dele. Aqui distinguimos a intuição intelectual da dedução certa pelo fato que nesta se concebe uma espécie de movimento ou de sucessão, ao passo que naquela não é da mesma maneira; além disso, a dedução não requer, como a intuição, uma evidência atual, mas ela antes toma emprestado, de algum modo, a sua certeza da memória. Disso resulta, pode-se dizer, que as proposições que são a consequência imediata dos primeiros princípios se conhecem de um ponto de vista diferente, ora por intuição, ora por dedução; quanto aos primeiros princípios eles próprios, são conhecidos somente por intuição, e ao contrário as suas conclusões afastadas somente o são por dedução.[13] (ibidem, p.16-1, tradução nossa)

13 "*Maintenant on peut se demander pourquoi nous avons ajouté ici à l'intuition un autre mode de connaissance consistant dans la déduction, par laquelle nous entendons toute conclusion nécessaire tirée d´autres choses connues avec certitude. Il a fallu le faire, parce qu'on sait la plupart des choses d'une manière certaine sans qu'elles soient évidentes, pourvu seullement qu'on les déduise de principes*

Segundo Descartes, conforme o texto acima, a dedução anexada à intuição seria outra maneira de conduzir ao conhecimento da verdade. Entretanto, entende-se essa dedução, assinalada por Descartes, como o processo de raciocínio em que se caminha de um extremo a outro por uma série de juízos,[14] percorrendo um conjunto intermitente, com o intuito de captar somente a relação que cada ponto intermediário desse conjunto tem com seu antecedente, ou seja, não a ligação do primeiro com o último, mas o enlace do último com o penúltimo, desse com o antepenúltimo, desse com o anterior e assim, sucessivamente. Mas isso que Descartes caracteriza como dedução, não seria, a rigor, inferência dedutiva, já que o termo inferência[15] é

---

*vrais et connus, au moyen d'un mouvement continu et sens aucune interruption de la pensée qui voit nettement par intuition chaque chose en particulier. Ce n'est pas autrement que nous connaissons le lien qui unit le dernier anneau d'une chaîne au premier, bien qu'un seul et même coup d'oeil soit incapable de nous faire saisir intuitiviment tous les anneaux intermédiaires qui constituent ce lien : il suffit que nous les ayons parcourus successivement et que nous gardions le souvenir que chacun d'eux, depuis le premier jusqu'au dernier, tient à ceux qui sont le plus rapprochés de lui. Ici donc nous distinguons l'intuition intellectuelle de la déduction certaine par le fait que, dans celle-ci, on conçoit une sorte de mouvement ou de succession, tandis que dans celle-là il n'en est pas de même ; en outre, la déduction ne requiert pas comme l'intuition une évidence actuelle, mais elle emprunte plutôt en quelque manière sa certitude à la mémoire. Il en résulte, peut-on dire, que les propositions qui sont la conséquence immédiate des premiers principes se connaissent d'un point de vue différent, tantôt par intuition, tantôt par déduction ; quant aux premiers principes eux-mêmes, ils sont connus seulement par intuition, et au contraire leurs conclusions éloignées ne le sont que par déduction."*

14 Ato de entendimento, pelo qual se afirma a conveniência de duas ideias (Abbagnano, 1999).

15 Segundo Abbagnano (1999, p.562), "no latim medieval, encontra-se em muitos lógicos o termo *inferre*, que designa o fato de, numa conexão (ou *consequentia*) de duas proposições, a primeira (antecedente) implica (ou melhor, contém por "implicação estrita") a segunda (consequente). [...] Na língua inglesa, esse uso é muito amplo, significando desde implicação, como p. ex. em Jevons e, em geral, nos lógicos ingleses do séc. XIX, até o processo mental por meio do qual, partindo de determinado dados, se chega a uma conclusão por implicação ou mesmo por indução".

muitas vezes empregado como sinônimo de raciocínio e se aplica a toda espécie de raciocínio dedutivo[16] e indutivo.[17]

Como foi salientado em linhas anteriores, a preocupação com o estabelecimento de um método para conhecer a verdade constitui-se, como se sabe, num esforço extensivo, à época de Descartes e posterior à sua, e que teve origem em assuntos vinculados às investigações científicas. Porém, o método de Descartes parece figurar, entre suas reflexões, como algo exigido por seu espírito crítico, que desde a juventude se defrontava com a herança histórica e filosófica, já canônica desse modelo, com o intuito de interpretar e aperfeiçoar os já existentes e determinar um método eficaz na busca da verdade. Tal propósito pode ser observado no trecho da primeira parte do *Discours de la méthode*.

> Mas não recearei dizer que penso ter tido muita felicidade de me haver encontrado, desde minha juventude, em certos caminhos, que me conduziram a considerações e máximas das quais formei um Método pelo qual me parece que eu tenha meio de aumentar gradualmente meu conhecimento e de elevá-lo, pouco a pouco, ao mais alto ponto, a que a mediocridade de meu espírito e a curta duração de minha vida lhe poderão permitir atingir.[18] (idem, 1976, p.3, tradução nossa)

---

16 O raciocínio dedutivo é o modo ou processo de raciocinar no qual se parte da causa para os efeitos, dos princípios para as consequências, do geral para o particular (Abbagnano, 1999).

17 O raciocínio indutivo é o modo ou processo de raciocinar que consiste em estabelecer uma conclusão geral dos fatos particulares que se produzem constantemente (Abbagnano, 1999).

18 *"Mais je craindrai pas de dire que je pense avoir eu beaucoup d'heur, de m'être rencontré des ma jeunesse en certains chemins, qui m'ont conduir à des considérations et des maximes, dout j'ai formé une Méthode, par laquelle il me semble que j'ai moyen d'augmenter par degrés ma connaissance, et de l'élever peu à peu au plus haut point, auquel la médiocrité de mon esprit et la courte dureé de ma vie lui pourront permettre d'atteindre."*

Assim, Descartes, no enunciado da *Regra IV*, afirma que "o método é necessário para a investigação da verdade" (tradução nossa).[19] Nesta regra, Descartes adverte que o estudo realizado sem nenhuma ordem, com reflexões precipitadas e duvidosas, contribui para ocultar a compreensão precisa do objeto de estudo.

> Ora, vale muito mais nunca pensar em procurar a verdade de nenhuma coisa do que fazê-lo sem método: com efeito, é inteiramente certo que os estudos desse tipo feitos sem ordem e as meditações confusas obscurecem a luz natural e cegam os espíritos. Quem quer que se acostume a caminhar assim nas trevas enfraquece de tal forma a acuidade do olhar que depois não pode suportar a luz do dia. É mesmo um fato da experiência: nós vemos mais frequentemente os que nunca se consagraram às letras julgarem o que se lhes apresenta com muito mais solidez e clareza que aqueles que sempre frequentaram as escolas.[20] (idem, 1908, p.19, tradução nossa)

Assim, dando continuidade a essa última citação, Descartes explicita o que entende por método e salienta algo importante para estabelecê-lo, isto é, que tal método de investigação possibilite aos indivíduos que buscam a verdade um desenvolvimento compreensível quanto ao aproveitamento da intuição intelectual nesta pesquisa inquisitória, com o propósito de não cometer erros que afetem a investigação da verdade e, além disso, crie condições para os indivíduos de fazer suas deduções seguras e, com isso, obter um conhecimento certo quanto ao objeto pesquisado.

---

19 *"La méthode est nécessaire pour la recherche de la vérite."*

20 *"Or, il vaut beaucoup mieux ne jamais penser à chercher la vérité d'aucune chose plutôt que de le faire sans méthode: il est tout à fait certain, en effet, que les études de cette sorte faites sans ordre et les méditations confuses obscurcissent la lumière naturelle et aveuglent les esprits. Quiconque s'accoutume à marcher ainsi dans les ténèbres s'affaiblit tellement l'acuité du regard que dans la suite il ne pent supporter le grand jour. C'est même un fait d'expérience: nous voyons le plus souvent ceux qui ne se sont jamais consacrés aux lettres juger de ce qui se présente à eux avec beaucoup plus de solidité et de clarté que ceux qui ont toujours fréquenté les écoles."*

Quanto ao método, entendo por isso regras certas e fáceis cuja observação exata fará que não importe quem nunca tome nada de falso por verdadeiro, e que, sem despender inutilmente nenhum esforço de inteligência, chegará, por um acréscimo gradual e contínuo de consciência, ao verdadeiro conhecimento de tudo o que será capaz de conhecer.

É necessário notar aqui estes dois pontos: não pôr seguramente nada de falso no lugar do verdadeiro e chegar ao conhecimento de tudo. Com efeito, se ignoramos alguma coisa de tudo o que podemos saber, é somente porque nunca percebemos uma via para nos conduzir a um tal conhecimento, ou então porque caímos num erro contrário. Mas, se o método nos dá uma explicação perfeita do uso a fazer da intuição intelectual para não cair num erro contrário à verdade, e do meio de encontrar deduções para chegar ao conhecimento de tudo, parece-me que nada mais é exigido para que seja completo, visto que nenhuma ciência se pode adquirir exceto pela intuição intelectual ou por dedução, como já foi mencionado anteriormente. Porque não se pode entender até ensinar como se devem fazer as próprias operações, porque elas são as mais simples e as primeiras de todas, de sorte que se nosso entendimento não pudesse fazer já uso delas anteriormente, não compreenderia nenhum dos preceitos do próprio método, por mais fáceis que fossem. Quanto às outras operações intelectuais que a dialética se esforça por dirigir com a ajuda destas primeiras, são aqui inúteis, ou antes devem ser contadas no número dos obstáculos, porque não há nada que se possa ajuntar à pura luz da razão sem a obscurecer de alguma maneira.[21] (ibidem, p.19-20, tradução nossa)

---

21 *"Quant à la méthode, j'entends par là des règles certaines et faciles dont l'exacte observation fera que n'importe qui ne prendra jamais rien de faux pour vrai, et que, sans dépenser inutilement aucun effort d'intelligence, il parviendra, par un accroissement graduel et continu de conscience, à la véritable connaissance de tout ce qu'il sera capabre de connaitre."*

*"Il faut noter ici ces deux points: ne mettre assurément rien de faux à la place du vrai et parvenir à la connaissance de tout. En effet, si nous ignorons quelque chose de tout ce que nous pouvons savoir, c'est seulement parce que nous n'avons jamais aperçu de voie pour nous conduire à une telle connaissance, ou bien parce que nous sommes tombés dans une erreur contraire. Mais, si la méthode nous donne une*

Além disso, conforme essa citação, convém ressaltar o que se entende por método, isto é, num sentido mais geral, o método é a ordem que se deve impor aos diferentes processos mentais necessários para descobrir ou confirmar suas verdades. Por fim, a utilização do método tem por intento disciplinar o processo mental, excluir das investigações as vontades súbitas que sobrevêm sem razão alguma e o conjunto de informações que não têm relações entre si, determinar os recursos de investigação e a ordem da pesquisa. Descartes também assinala a distinção entre as operações primeiras, a saber, a intuição intelectual e a dedução, já explicitadas em linhas anteriores. Enfim, na *Regra II*, Descartes destaca que a dialética, como arte de raciocinar com método, procurando a verdade por meio da oposição e conciliação de contradições lógicas, não é um procedimento adequado no processo heurístico cartesiano.

Em seguida, dois importantes procedimentos serão ressaltados por Descartes: a análise porística[22] e a zetética,[23] utilizadas pelos

---

*explication parfaite de l'usage à faire de intuition intellectuelle pour ne pas tomber dans une erreur contraire au vrai, et du moyen de trouver des déductions pour parvenir à la connaissance de tout, rien d'autre, me semble-t-il, n'est exigé pour qu'elle soit complète, puisque aucune science ne peut s'acquérir que par l'intuition intellectuelle ou par la déduction, comme il a été déjà dit antérieurement. Car elle ne peut pas s'éntendre jusqu'à enseigner comment doivent se faire ces opérations mêmes, parce qu'elles sont les plus simples et les première de toutes, en sorte que, si notre entendement ne pouvait pas en faire déjà usage auparavant, il ne comprendrait aucun des préceptes de la méthode elle-même, quelque faciles qu'ils fussent. Quant aux autres opérations intellectuelles que a Dialectique s'efforce de diriger à l'aide de ces premières, elles sont ici inutiles, ou plutôt doivent être comptées au nombre des obstacles, parce qu'il n'est rien qu'on puisse ajouler à la pure lumière de la raison sans l'obscurcir de quelque manière."*

22 Conforme Lalande (1996, p.823): análise porística – expressão tirada provavelmente do título dos *Porismas* de Euclides; é utilizada por Viète que a opõe à análise zetética. É a ela unicamente que realmente se aplicam as definições da análise pelos gregos. Ela tem por finalidade a invenção, não de uma solução, mas de uma demonstração por uma solução ou uma proposição enunciadas. Supõe-se verdadeira esta solução ou proposição e, tendo em conta as condições dadas, transforma-se a relação que ela exprime até se chegar a uma identidade ou a uma proposição já conhecida. Para obter a demonstração, basta inverter a análise.

23 Também segundo Lalande (1996, p.1232): análise zetética – que constitui uma pesquisa. Diz-se quase exclusivamente de uma das duas formas de análise

gregos, respectivamente, como processo de demonstração e solução de problemas. A primeira tem por propósito, quando possível, criar uma *demonstração* para o problema, conforme as condições impostas, e consiste no estabelecimento de uma sequência finita de proposições que se inicia com a que se quer demonstrar, admitindo-a como proposição verdadeira, buscando conseguir uma identidade ou uma proposição conhecida, de sorte que cada uma das proposições desta sequência finita será uma inferência necessária da proposição seguinte; logo, segue-se que a primeira é uma consequência da última e, portanto, verdadeira como esta.

A segunda tem por propósito, quando possível, criar uma *solução* para o problema, conforme as condições impostas pelo mesmo, e consiste no estabelecimento de uma sequência finita de proposições que tenham relações com as condições do problema, mas sem ter a preocupação de especificar nessa sequência as proposições conhecidas e as não conhecidas. Feito isso, por intermédio de um processo de exclusão, busca-se conseguir uma última relação que, evidentemente, tenha uma correspondência verdadeira e inclua uma quantidade mínima de incógnitas para a solução do problema. Conforme Descartes, o processo é fruto espontâneo dos princípios naturais do método. A esse respeito, convém salientar que não são *frutos espontâneos*, já que Descartes os conhecia dos trabalhos filosóficos e matemáticos dos gregos, e assim, com certeza, os procedimentos via análise utilizados pelos geômetras gregos, em particular a *Coleção matemática* de Pappus que, no Livro VII, fornece uma descrição dos métodos empregados pelos geômetras gregos, especificamente, sobre o significado da análise. Como salienta o próprio Descartes, deve-se ler os livros dos antigos.

---

distinguidas por Viète: a segunda forma de análise dos antigos recebeu de Viète o nome de zetética. O seu objeto é a invenção das soluções (ou proposições equivalentes). Com efeito, é o procedimento fundamental do método analítico moderno: supor o problema resolvido, estabelecer as relações das condições sem distinguir entre as quantidades e as quantidades desconhecidas, chegar, por iluminação, a uma relação final que já contém o número mínimo de incógnitas conhecidas.

> Devemos ler os livros dos antigos, já que é muito vantajoso para nós podermos aproveitar os trabalhos de um tão grande número de homens, seja para conhecer as invenções já feitas antigamente com sucesso, seja ainda para sermos informados do que permanece ainda por encontrar em todas as disciplinas.[24] (ibidem, p.11, tradução nossa)

Ou, ainda, pode-se ler na *Regra IV*, consoante essa passagem:

> Nós fazemos disso experiências nas mais fáceis das ciências, a Aritmética e a Geometria. Com efeito, salientamos suficientemente que os antigos geômetras utilizaram uma espécie de *análise* que eles estendem à solução de todos os problemas, ainda que dela tenha-se servido a posteridade. E agora floresce um gênero de Aritmética que se denomina Álgebra, permitindo fazer pelos números o que os antigos faziam pelas figuras. Estas duas coisas nada mais são que frutos espontâneos dos princípios naturais do nosso método, e não me surpreende que esses frutos se integrem nas artes, objetos que são – de tal forma simples –, de maneira a produzir um sucesso, ainda maior, do que naqueles cujos maiores obstáculos os revestem de aspecto comum. Não obstante cultivando-os com extremo desvelo poder-se-á obter seguramente uma perfeita maturidade.[25] (ibidem, p.21, tradução nossa)

---

24 *"On doint lire les livres des Anciens, du moment qu'il est fort avantageux pour nous de pouvoir profiter des travaux d'un si grand nombre d'hommes, soit pour connaître les inventions déjà faites autrefois avec succès, soit aussi pour être informés de ce qu'il reste encore à trouver dans toutes les disciplines."*

25 *"Nous en faisons l'expérience dans les plus faciles des sciences, l'Arithmétique et la Géométrie. En effet, nous remarquons suffisamment que les anciens Géomètres ont utilisé une sorte d'analyse qu'ils étendaient à la solution de tous les problèmes, bien qu'ils en aient privé la postérité. Et maintenant fleurit un genre d'Arithmétique, qu'on nomme Algèbre, permettant de faire pour les nombres ce que les anciens faisaient pour les figures. Ces deux choses ne sont rien d'autre que des fruits spontanés des principes naturels de notre méthode, et je ne suis pas étonné que ce soit dans ces arts dont les objets sont très simples qu'ils ont poussé jusqu'ici avec plus de bonheur que dans les autres, où de plus grands obstacles les étouffent d'ordinaire, mais où néanmoins, en prenant un soin extrême à les cultiver, on les fera immanquablement parvenir à une parfaite maturité."*

Descartes, nesta passagem, salienta novamente como se deve proceder na investigação do conhecimento e, além disso, proclama a universalidade de seu método de pesquisa da verdade.

> Quanto a mim, consciente da minha fraqueza, tenho decidido observar obstinadamente uma ordem na investigação dos conhecimentos tal que, iniciando sempre pelos objetos mais simples e mais fáceis, nunca passe a outros sem que me pareça que os primeiros nada mais me deixem a desejar. É por isso que tenho cultivado até agora essa Matemática universal, tanto como estava em mim, de maneira a poder tratar depois de ciências mais elevadas, sem me aplicar a elas prematuramente.[26] (ibidem, p.28, tradução nossa)

Ao examinar a *Regra V*, nota-se que ela expõe a importância de ordenar o conjunto de proposições que compõem um determinado problema; tal disposição será caracterizada segundo o grau de complexidade que apresenta cada proposição. Desse modo, analisa-se primeiramente a mais simples, em seguida a proposição posterior a essa última e assim sucessivamente. Ao refletir sobre essa regra, Descartes salienta: "é nisso só que reside o mais alto da atividade humana, e esta regra não deve ser menos guardada por aquele que procura conhecer as coisas que o fio de Teseu por aquele que queria penetrar no labirinto"[27] (ibidem, p.29, tradução nossa).

> Todo método consiste na ordem e disposição dos objetos sobre os quais é necessário inferir da inteligência para descobrir alguma

---

26 *"Quant à moi conscient de ma faiblesse, j'ai décidé d'observer obstinément un tel ordre dans la recherche des connaissances que, débutant toujours par les objets les plus simples et les plus faciles, je ne passe jamais à d'autres sans qu'il me semble que les premiers ne me laissent plus rien à désirer. C'est pourquoi, j'ai cultivé jusqu'ici cette Mathématique universelle, autant qu'il était en moi, en sorte que je crois pouvoir dans la suite traiter de sciences plus élevées, sans m'y appliquer prématurément."*

27 *"C'est en cela seul que réside le plus haut point de l'industrie humaine, et cette règle ne doit pas être moins gardée par celui qui chercher à connaître les choses, que le fil de Thésée par celui qui voudrait pénétrer dans le labyrinthe."*

> verdade. A ele permaneceremos cuidadosamente fiéis, se substituirmos gradualmente as proposições complicadas e obscuras por proposições mais simples, e em seguida se, partindo da intuição daquelas que são as mais simples de todas, nós esforçarmos por meio desses degraus para alcançarmos o conhecimento das demais.[28] (ibidem, p.29, tradução nossa)

Descartes, ao dissertar sobre essa regra, ressalta que nesse procedimento reside o ponto mais alto da atividade humana e cita, como exemplos, alguns estudiosos (astrólogos, mecânicos, filósofos etc.) que não refletem sobre o que determina a regra, ou ignoram-na completamente, ou então presumem não haver necessidade de aplicar seu preceito.

> É nisso só que reside o mais alto ponto da atividade humana e esta regra não deve ser menos observada por aquele que procura conhecer as coisas que o fio de Teseu por aquele quereria penetrar no labirinto. Mas muitas pessoas ou não refletem no que prescreve, ou então a ignoram completamente, ou então presumem não terem necessidade [dela], e frequentemente examinam com uma tal falta de ordem as questões mais difíceis que me parecem agir como se se esforçassem por chegar de um salto da base de um edifício até o cume, seja negligenciando os degraus da escada destinados a esse uso, seja não os notando. Assim fazem todos os Astrólogos, que sem conhecerem a natureza dos céus e sem mesmo terem observado perfeitamente os movimentos, creem poder indicar os efeitos.
>
> Do mesmo modo fazem a maior parte daqueles que estudam a Mecânica sem a Física e fabricam desconsideradamente novos instrumentos para produzir movimentos. Assim fazem, ainda, esses

28 *"Toute la méthode consiste dans l'ordre et l'arrangement des objets sur lesquels il faut faire porter la pénétration de l'intelligence pour découvrir quelque vérité. Nous y resterons soig neosement fidèles, si nous ramenons graduellement les propositions compliquées et obscures à des propositions plus simples, et ensuite si, partant de l'intuition de celles qui sont les plus simples de toutes, nous tâchons de nous élever par les mêmes degrés à la connaissance de toutes les autres."*

Filósofos que negligenciam as experiências e creem que a verdade deva sair do seu próprio cérebro, como Minerva de Júpiter.

E certamente todos aqueles dos quais acabamos de falar pecam com evidência contra a nossa regra. Mas, como frequentemente a ordem que se exige aqui é de tal sorte obscura e complicada não estando alcance de todos poder identificá-la tal qual ela é, dificilmente será possível para observar com cuidado o que será exposto na proposição seguinte.[29] (ibidem, p.29-30, tradução nossa)

Na última citação da *Regra V*, *a menos que se observe com cuidado o que será exposto na proposição seguinte*, Descartes deixa patente a importância da *Regra VI* para discernir entre proposições mais simples das que são complexas e dispô-las numa série, segundo o grau de complexidade que apresentarão e, desse modo, inferir certas considerações das proposições consideradas. Então, para diferenciar esses graus de complexidade, Descartes define *proposições*[30]

---

29 *"C'est en cela seul que réside le plus haut point de l'industrie humaine, et cette règre ne doit pas être moins gardée par celui qui chercher à connaître les choses, que le fil de Thésée par celui qui voudrait pénétrer dans le labyrinthe. Mais beaucoup de gens, ou bien ne réfléchissent pas à ce qu'elle prescrit, ou bien l'ignorent tout à fait, ou bien présument n'en avoir pas besoin, et souvent examinent avec un tel défaut d'ordre les questions les plus difficiles qu'ils me semblent agir comme s'ils s'efforçaient de parvenir d'un saut du bas d'un édifice jusqu'au faîte, soit en négligeant les degrés de l'échelle destinés à cet usage, soit en ne les remarquant pas. Ainsi font tous les Astrologues, qui, sans connaître la nature des cieux et sans même en avoir parfaitement observé les mouvements, croient pouvoir en indiquer les effets."*
*"Ainsi font la plupart de ceux qui étudient la Mécanique sans la Physique et fabriquent á la légère de nouveaux instruments pour produire des mouvements. Ainsi font encore ces Philosophes qui négligent les expériences et croient que la vérité doit sortir de leur propre cerveau comme Minerve de celui de Jupiter."*
*"Et certes tous ceux dont nous venons de parler pèchent avec évidence contre notre règle. Mais, comme souvent l'ordre qu'on exige ici est tellement obscur et compliqué qu'il n'est pas au pouvoir de tous de reconnaître quel il est, c'est à peine s'il est possible de prendre assez de d'observer avec soin ce qui sera exposé dans la proposition suivante."*

30 Parte de um discurso em que se apresenta e expõe o assunto que se pretende provar, estabelecer, discutir, contar, ensinar ou descrever ou, com maior rigor, a expressão verbal do juízo (Abbagnano, 1999).

*absolutas,*[31] *relativas*[32] *e suas relações*. As primeiras têm características universais e são independentes. As relativas têm características quase universais e são dependentes, tendo relações com as absolutas. Portanto, feitas essas ressalvas, Descartes (ibidem, p.32-3, tradução nossa) conclui:

> Nossa regra adverte-nos que é necessário distinguir todas estas relações e tomar cuidado com sua conexão mútua e sua ordem natural, de maneira que, partindo do último, possamos chegar ao que há de mais absoluto por intermédio de todos os outros.[33]

Continuando sua argumentação referente à *Regra VI*, ele estabelece três princípios.

Primeiro princípio:

> E o segredo de toda a arte consiste em notar em tudo com cuidado o que há de mais absoluto. Com efeito, há coisa que, sem dúvida, num ponto de vista são mais absolutas que outras, mas que, vista por outro ângulo parecerá mais relativa. Assim o universal é mais absoluto que o particular, porque tem uma natureza mais simples, mas podemos dizê-lo mais relativo que este último, porque a sua existência é extraída dos indivíduos etc. Do mesmo modo, certas coisas são por vezes verdadeiramente mais absolutas que outras, sem, contudo, serem ainda as mais absolutas de todas; por exemplo, se

31 Antes de definir proposição absoluta, conceitua-se silogismo o argumento composto de três termos que formam combinadamente três proposições, das quais a terceira se deduz da primeira por intermédio da segunda. A primeira absoluta e a segunda relativa chamam-se premissas e a terceira conclusão. Portanto, proposição absoluta é a primeira das antecedentes no silogismo (Abbagnano, 1999).

32 Proposição relativa: a segunda do silogismo; aquela em que se afirma que o sujeito da conclusão entra na extensão do meio termo. (Abbagnano, 1999)

33 *"Notre règla nous avertit qu'il faut distinguer tous ces rapports et prendre garde à leur connexion mutuelle et à leur ordre naturel, de manière qu'en partant du dernier nous puissions parvelir à ce qu'il y a de plus absolu par l'intermédiaire de tous les autres."*

considerarmos os indivíduos, a espécie é qualquer coisa de absoluto; se há consideração ao gênero, ela é qualquer coisa de relativo; entre os objetivos mensuráveis, a extensão é qualquer coisa de absoluto, mas entre as espécies de extensão é o comprimento que é absoluto etc. Do mesmo modo, para melhor entendimento, consideramos aqui uma série de coisas a serem conhecidas, e não a natureza de cada uma delas, é com propósito determinado que revelamos a causa e a identificação entre as coisas absolutas, se bem que a sua natureza seja verdadeiramente relativa. Com efeito, para os Filósofos, a causa e o efeito são os fatores correlativos, ao passo que aqui, por causa disso, pesquisando o que é um efeito, é necessário antes conhecer a causa e não inversamente. As coisas iguais também se correspondem umas às outras, mas somente reconhecemos as que são desiguais comparando-as às coisas iguais e não inversamente etc.[34] (ibidem, p.33-4, tradução nossa)

Segundo princípio:

É necessário notar, em segundo lugar, que há somente um pequeno número de naturezas puras e simples que se possa ver por intuição à primeira vista e em si próprias, sem dependência de

34 *"Et le secret de l'art tout entier consiste à remarquer en tout avec soin ce qu'il y a de plus absolu. Il y a des choses en tout effet qui, certes, à un point de vue sont plus absolues que d'autres, mais considérées autrement, sont plus relatives. Ainsi l'universel est plus absolu que le particulier, parce qu'il a une nature plus simples, mais on peut le dire plus relatif que ce dernier, parce qu'il tire son existence des individus etc. De même, certaines choses sont parfois vraiment plus absolues que d'autres, sans être pourtant encore les plus absolues de toutes: par exemple, si nous envisageons les individus, l'espèce est quelque chose d'absolu; si nous avons égard au genre, elle est quelque chose de relatif; parmi les objets mesurables, l'etendue est quelque chose d'absolu, mais parmi les sortes d'etendue, c'est la longueur qui est l'asolu etc. De même enfin, pour mieux faire comprendre que nous considérons ici des séries de choses à connaître et non la nature de chacune d'elles, c'est à dessein que nous avons compté la cause et l'égal parmi les choses absolues, bien que leur soit vraiment relative. En effet, pour les Philosophes, la cause et l'effet sont choses corrélatives, tandis qu'ici, en cherchant ce qu'est un effet, il faut auparavant connaître la cause et non inversement."*

nenhuma outra, mas nas próprias experiências ou graças a uma luz que nos é inata. Dizemos que é necessário considerá-las com cuidado, já que são elas que em cada série chamamos as mais simples. Para todas as outras naturezas, não podem ser percebidas senão deduzindo-as das primeiras, e isso seja somente por duas ou três ou várias conclusões diferentes, cujo número, também, deve ser notado, a fim de reconhecer se mais ou menos graus as afastam da proposição que é a primeira e a mais simples. Tal é por toda/em toda a parte o encadeamento das consequências que gera esta série de objetos de pesquisa, aos quais é necessário restabelecer toda questão para ser capaz de a examinar com método seguro. Mas como não é fácil passá-las todas em revista, e além do mais como não é tão necessário as reter na memória que as discernir por certa penetração do espírito, deve-se buscar um meio para dar aos espíritos uma formação que lhes permita reconhecê-las imediatamente, cada vez que for necessário. Por isso, seguramente, nada convêm melhor, segundo minha experiência, que acostumar-nos a refletir com certa sagacidade sobre cada uma das mínimas coisas que anteriormente percebemos.[35] (ibidem, p.34-5, tradução nossa)

35 *"Il faut noter, en second lieu, qu'il y a seulement un petit nombre de natures pures et simples qu'on puisse voir par intuition de prime abord et en elles-mêmes, sans dépendance d'aucunes autres, mais dans les expériences mêmes ou gràce à une lumière qui nous est innée. Nous disons qu'il faut les considérer avec soin, car ce sont elles que dans chaque série nous appelons les plus simples. Pour toutes les autres nateures, elles ne peuvent être autrement perçues qu'en les déduisant des premières, et cela soit seulement par deux ou trois ou plusieurs conclusions différentes, dont le nombre aussi être noté, afin de reconnaître si plus ou moins de degrés les éloignent de la proposition qui est la première et la plus simple. Tel est partout l'enchaînement des conséquences qui donne naissance à ces séries d'objets de recherche, auxquelles ils faut ramener toute question pour être à même de l'examiner avec méthode sûre. Mais, comme il n'est pas facile de les passer toutes en revue, et de plus comme il ne faut tant les retenir de mémoire que les discerner par une certaine pénétration d'esprit, on doit chercher un moyen de donner aux esprit une formation qui leur permette de les aussitôt, chaque fois qu'il en sera besoin. Pour cela, assurément, rien ne convient mieux, d'après mon expérience, que de nous accoutumer à réfléchir avec quelque sagacité à chacune des moindres choses que nous avons auparavant perçues."*

Terceiro princípio:

> É necessário notar enfim, em terceiro lugar, que não se deve começar os estudos pela pesquisa aprofundada das coisas difíceis, mas que é necessário, antes nos prepararmos a afrontar (enfrentar) algumas questões determinadas, recolher espontaneamente sem nenhuma escolha as verdades que se nos apresentam, e ver em seguida gradualmente se se podem deduzir algumas outras, depois destas últimas outras ainda e assim por diante. Isto feito, é necessário refletir atentamente nas verdades encontradas e examinar com cuidado porque foi possível encontrar umas mais cedo e mais facilmente que as outras e que aí estão. Assim sabemos julgar, ao abordar uma determinada questão, de quais outras investigações convém se livrar primeiramente.[36] (ibidem, p.35, tradução nossa)

A *Regra VII* estabelece que se deve fazer uma enumeração[37] criteriosa das partes que compõem o objeto a ser pesquisado, isto é, conhecer as relações que existem entre as proposições *A* e *B*, em seguida entre *B* e *C*, posteriormente entre *C* e *D*, e finalmente entre *D* e *E*, e, deste modo, no término deste processo, compreender as relações existentes entre *A* e *E* e, assim, conhecer por completo o objeto pesquisado. Portanto, ao término desse procedimento, será possível tecer conclusões sobre o tema pesquisado. Serão citadas algumas passagens importantes dessa regra:

---

36 *"Il faut noter enfin, en troisième lieu, qu'on ne doit pas commencer les études par la recherche approfondie des choses difficilles, mais qu'il est nécessaire, avant de nous apprêter à affronter quelques questions déterminées, de recueillir spontanément sans aucun choix les vérités qui se présentent à nous, et de voir ensuite graduellement si l'on peut en déduire quelques autres, puis de ces dernières d'autres encore, et ainsi de suite. Cela fait, il faut réfléchir attentivament aux vérités trouveés et examiner avec soin pourquoi nous avons pu trouver les unes plus tôt et plus facilment que les autres et quelles sont celles-lá. Ainsi nous saurons, juger, en abordant une question déterminée, à quelles autres recherchers il est d'abord de se livrer."*

37 Segundo Abbagnano (1999, p.336), "assim expressa, essa regra refere-se mais ao controle dos resultados do procedimento racional do que à descoberta desses resultados".

Para o brilho da ciência, é necessário passar em revista uma a uma todas as coisas que se encadeiam segundo nosso fim, por um movimento de pensamento contínuo e sem nenhuma interrupção, e é necessário abrangê-las numa enumeração suficiente e metódica.[38] (ibidem, p.39, tradução nossa)

A observação do que aqui é proposto é necessário para admitir como certas essas verdades que, ditas anteriormente, são deduzidas dos princípios primeiros e conhecidos por si mesmo, mas não imediatamente. Com efeito, isto se faz às vezes por um encadeamento tão longo de consequências que após termos atingido essas verdades, não é fácil refazermos o percurso que para aí nos conduziu; é por isso que dizemos ser necessário remediar a fraqueza da memória por uma espécie de movimento contínuo do pensamento. Se, portanto, por exemplo, diversas operações me fizerem conhecer imediatamente que relação há entre as grandezas *A* e *B*, depois entre *B* e *C*, depois entre *C* e *D*, e enfim entre *D* e *E*, eu não vejo por isso qual é esta (relação) que existe entre *A* e *E*, e não posso fazer uma ideia precisa segundo as relações já conhecidas, a menos que me lembre de todas. Eis porque, os percorri um certo número de vezes numa espécie de movimento contínuo da imaginação, a qual vê simultaneamente cada objeto em particular e o conjunto ao qual pertence, até que eu tenha adquirido o automatismo de passar da primeira relação à última tão rapidamente de modo que, sem deixar quase nenhum papel à memória, pareça-me ver o todo simultaneamente por intuição. Com efeito, desta maneira, ajudando a memória, corrige-se, também, a lentidão do espírito e estende-se de alguma maneira sua capacidade.[39] (ibidem, p.39-40, tradução nossa)

38 *"Pour l'achévement de la science, il fant passer en revue une à une toute les choses qui se rattachent à notre but par un mouvement de pensée continu et sans nulle interruption, et il faut les embrasser dans une énumération suffissante et méthodique."*

39 *"L'observation de ce qui est proposé ici est nècessaire pour admettre comme certaines ces vérités qui, nous l'avons dit plus haut, sont déduites des principes premiers et connus par eux-mêmes, mais non immédiatement. Cela se fait en effet quelquefois par un si long enchaînement de conséquences qu'après avoir atteint ces vérités, il*

E acrescentando que este movimento não deva ser interrompido em nenhuma parte – porque frequentemente aqueles que tentam fazer alguma dedução demasiado rápida, partindo de princípios afastados, não percorrem todo o encadeamento das conclusões intermediárias com um suficiente cuidado – para não omitirem muitas involuntariamente. Contudo, é seguro que mesmo a menor das omissões faz logo romper a cadeia e arruina inteiramente a certeza da conclusão.[40] (ibidem, p.40, tradução nossa)

Além disso, a enumeração é necessária para a conclusão da ciência; uma vez que, se os outros preceitos nos servem, certamente, para resolver o maior número de questões, apenas a enumeração poderá nos ajudar a aplicar o nosso espírito a qualquer uma delas, com a finalidade de conduzir a um julgamento seguro obre a matéria; consequentemente não podemos deixar escapar absolutamente nada, mas fazer emergir alguma ciência de toda coisa.[41] (ibidem, p.40-1, tradução nossa)

---

*n'est pas facile de nous rappeler tout le chemin qui nous y a conduits; c'est pourquoi nous disons qu'il faut remédier à la faiblesse de la mémoire par une sorte de mouvement continu de la pensée. Si donc, par exemple, diverses opérations m'ont fait connaître d'abord quel rapport il y a entre les grandeurs A et B, ensuite entre B et C, puis entre C et R, et enfin entre D et E: je ne vois pas pour cela quel est celui qui existe entre A et E, et ne puis m'en faire une idée précise d'après les rapport déjà connus, à moins de me les rappeler tous. C'est pourquoi, je les parcourrai un certain nombre de fois par une sorte de mouvement continu de l'imaginetion qui voit d'un seul coup chaque objet en particulier en même temps qu'elle passe aux autres, jusqu'à ce que j'aie appris à passer du premier rapport au dernier assez rapidement pour que, sans laisser presque aucun rôle à la mémoire, il me semble voir le tout à la fois par intuition. De cette façon, en effet, en aidant la mémoire, on corrige aussi la lenteur de l'esprit et on étend en quelque manière as capacité."*

40 *"Et nous ajoutons que ce mouvement ne doit être nulle part interrompu, car fréquemment ceux qui essaient de faire quelque déduction trop rapide, en partant de principes éloignés, ne parcourent pas tout l'enchaînement des conclusions intermédiaires avec un soin suffisant pour ne pas en omettre beaucoup inconsidérément. Toutefois, il est sûr que même la moindre des omissions fait aussitôt rompre la chaîne et ruine entièrement la certitude de la conclusion."*

41 *"En outre, nous disons ici que l'énumération est requise pour l'achèvement de la science; car, si les autres préceptes nous servent, certes, à résoudre le plus grand*

> Esta enumeração, ou indução, é então a pesquisa de tudo o que se reporta a uma questão proposta, pesquisa tão diligente e tão cuidadosa que dela tiremos a conclusão certa e evidente que nada tenhamos omitido por inadvertência; de tal sorte que, depois de ter usado, se o objeto de nossa pesquisa nos permanece escondido, sejamos pelo menos mais sábios no que percebemos seguramente, que não teríamos podido encontrá-lo por nenhuma das vias que nos são conhecidas; e que, se por acaso, como frequentemente acontece, pudemos percorrer todas as vias pelas quais os homens aí tenham acesso, e nos seja permitido afirmar audaciosamente que o seu conhecimento está fora de todo alcance do espírito humano.[42] (ibidem, p.41, tradução nossa)

Segundo Descartes, a indução é um raciocínio pelo qual a razão, valendo-se de dados singulares suficientes, infere uma verdade universal. Assim, pode-se compreender que a indução difere da dedução porque, como salientou Descartes (ibidem, p.40), "aqueles que tentam fazer alguma dedução demasiado rápida, partindo de princípios afastados, não percorrem todo o encadeamento das conclusões intermediárias com um suficiente cuidado para não omitirem muitas inconsideradamente". No raciocínio dedutivo chega-se à conclusão contida nas premissas, como a parte no todo, ao passo que no raciocínio indutivo, a conclusão está para as premissas como o todo para as partes. Conforme Abbagnano (1999, p.556),

---

*nombre de questions, c'est l'énumération seule qui peut nous aider à appliquer notre esprit à n'importe d'entre elles, à porter toujours à son sujet un jugement sûr et certain, et par conséquent à ne rien laisser échapper complètement, mais à paraître avoir quelque science de toutes choses."*

42 *"Cette ènumération, ou induction, est donc la recherche de tout ce qui se rapporte à une question proposée, recherche si diligente et si soignée que nous en tirions la conclusion certaine et évidente que nous n'avons rien omis par mégarde; de telle sorte que, après en avoir usé, si l'objet de notre recherche nous caché, nous soyons du moins plus savants, en ce que nous percevons sûrement que nous n'aurions pu le trouver par aucune des voies qui nous sont connues; et que si, par hasard, comme il arrive souvent, nous avons pu parcourir toutes les voies par lesquelles les hommes y accèdent, il nous soit permis d'affirmer audacieusement que as connaissance est hors de toute portée de l'esprit humain."*

a indução é o procedimento que leva do particular ao universal: com esta definição de Aristóteles concordam todos os filósofos. O próprio Aristóteles vê na indução um dos caminhos pelos quais conseguimos formar nossas crenças; a outra é a dedução (silogismo).

Segundo Descartes (1908, p.41-2, tradução nossa)

> É necessário notar, além disso, que por enumeração suficiente ou indução entendemos somente aquela que nos dá a verdade da sua conclusão com mais certeza que qualquer outro gênero de prova, salvo a simples intuição. Cada vez que não podemos restituir um conhecimento à intuição, após ter rejeitado todos os laços dos silogismos, resta-nos unicamente esta via à qual sejamos obrigados a acreditar cabalmente, visto que todas as coisas que temos deduzido imediatamente uma das outras, se a inferência foi evidente, foram já foram reduzidas a uma verdadeira intuição. Mas, se tiramos uma só consequência de um grande número de coisas separadas, frequentemente a capacidade do nosso entendimento não basta para uni-las todas em uma só intuição; nesse caso, deve resignar-se com a certeza dessa operação. Do mesmo modo, não podemos, por meio de um só golpe, distinguir todos os anéis de uma cadeia demasiado comprida; mas entretanto, se vimos o laço de cada um dos anéis que dele estão mais aproximados, isso nos bastará para dizer, também, que percebemos como o último se reata ao primeiro.[43]

43 *"Il faut noter en outre que, par énumération suffisant ou induction, nous entendedons seulement celle qui nous donne la vérité dans as conclusion avec plus de certitude que tout autre genre de preuve, sauf la simple intuition. Chaque fois que nous ne pouvons pas ramener à l'intuition quelque connaissance, après avoir rejeté tous les liens des syllogismes, il nous reste uniquement cette voie à laquelle nous soyons obligés d'ajouteer entièrement foi. Car, toutes les choses que nous avons déduites immédiatement les unes des autres, si l'inférence a été évidente, ont été déjà ramenées à une véritable intuition. Mais, si nous tirons une seule conséquence d'un grand nombre de chose séparées, souvent la capacité de notre entendement n'est pas suffisante pour lui permettre de les embrasser toutes dans une seule intuition; en ce cas, il doit se contenter de la certitude de cette opération. De même, nous ne pouvons pas, au moyen d'une seule intuition de la vue, distinguer tous les anneaux*

Nessa citação, Descartes adverte que é necessário e suficiente, por exemplo, num conjunto de proposições *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, conhecer as relações que existem entre as proposições *A* e *B*, em seguida entre *B* e *C*, posteriormente entre *C* e *D*, e finalmente entre *D* e *E* e, desse modo, no término desse processo, compreender as relações existentes entre *A* e *E*, conhecendo por completo o conjunto, isto é, ao término desse procedimento é possível tecer conclusões verdadeiras sobre o tema pesquisado.

> Quanto à ordem de enumeração das coisas, pode geralmente variar e depende do arbítrio de cada um; por isso, para que o pensamento esteja livre para desempenhar com mais sutileza, é necessário lembrar o que foi citado na quinta proposição. Há ainda uma quantidade de coisas, nas artes humanas de menor importância, em que consiste todo o método em estabelecer essa ordem. Assim, vale fazer um anagrama perfeito transpondo as letras de um nome, não é necessário passar do mais fácil para o mais difícil, nem distinguir as coisas absolutas das relativas: não é oportuno fazer isso aqui. Bastará propor, examinando as transposições das letras, uma ordem tal que nunca se percorra duas vezes a mesma e que o seu número seja por exemplo repartido em classes determinadas, de tal sorte que se veja logo em quais há mais possibilidade de achar o que se procura. Por estes meios, com efeito, frequentemente o trabalho não será longo: isto somente será uma brincadeira de criança.[44] (ibidem, p.44-5, tradução nossa)

---

*d'une trop longue; mais cependant, si nous avons vu le lien de chacun des anneaux avec ceux qui en sont le plus rapprochés, cela nous suffira pour dire aussi que nous avons aperçu comment le dernier se ratrache au premier."*

44 *"Quant à l'ordre d'énumération des choses, il peut d'ordinaire varier et dépend de l'arbitre de chacun; aussi, pour que la pensée soit à même de le dégager avec plus de finesse, il faut se rappeler ce qui a été dit dans la cinquième proposition. Il y a quantité de choses encore, dans les arts humains de moindre importance, qu'on trouver en faisant consister toute la méthode à établir cet ordre. Ainsi, veut-on faire une anagramme parfaite en transposant les lettres d'un nom, point n'est besoin de passer du plus facile au plus difficile, ni de distinguer les choses absolues des relatives: il n y a pas lieu de le faire ici. Il suffira de se proposer, en examinant les transpositions*

> Não obstante, estas três últimas (V, VI e VII) proposições não devem ser separadas, porque é necessário, geralmente, refletir nelas ao mesmo tempo e que elas concorram todas igualmente para a perfeição do método. Foi sem grande interesse determinar qual delas seria ensinada primeiro e nós explicamo-las aqui em poucas palavras, porque não temos quase nada que fazer além disso no resto do tratado, em que fazemos ver em detalhe que estamos interessados no geral.[45] (ibidem, p.45, tradução nossa)

Como se pode observar nessa citação, Descartes salienta a importância de ater-se às regras e verificar as relações existentes entre as *Regras V, VI* e *VII*, com o intuito de conseguir a exatidão do método para a busca da verdade. A saber, respectivamente, *Regras V, VI* e *VII*:

> Todo método consiste na ordem e disposição dos objetos sobre os quais é necessário inferir da inteligência para descobrir alguma verdade. A ele permaneceremos cuidadosamente fiéis, se substituirmos gradualmente as proposições complicadas e obscuras por proposições mais simples, e em seguida, se, partindo da intuição daquelas que são as mais simples de todas, nós esforçarmos segundo esses degraus para alcançarmos o conhecimento das demais.[46] (ibidem, p.29, tradução nossa)

> Para distinguir as coisas mais simples daquelas que são complicadas e colocar ordem na sua pesquisa, é necessário, em cada série de

---

*des lettres, un ordre tel que qu'on ne parcoure jamais deux fois les mêmes et que leur nombre soit réparti par exemple en classe déterminées, de telle sorte qu'on voie aussitôt dans lesquelles il y a plus de chance de trouver ce qu'on cherche. Par ce moyen, en effet, souvent le travail ne sera pas long: ce ne sera qu'un travail d'enfant."*

45 *"Au reste, ces trois dernières propositions ne doivent pas se séparer, parce qu'il faut d'ordinaire y réfléchir à la fois et qu'elles concourent pareillement toutes à la perfection de la méthode. Il était sans grand intérêt de déterminer laquelle serait enseignée la première et nous les avons expliquées ici en peu de mots, parce que nous n'avons presque rien autre chose à faire que cela dans le reste du traité, où nous ferons voir dans le détail ce à quoi nous sommes attaché ici en général."*

46 Cf. nota 28 deste capítulo.

> coisas em que temos deduzido diretamente algumas verdades umas das outras, notar o que é mais simples e como todo o resto está mais ou menos ou igualmente distante.[47] (ibidem, p.31, tradução nossa)

> Para a perfeição da ciência, é necessário passar em revista uma a uma todas as coisas que se encadeiam segundo nosso fim, por um movimento de pensamento contínuo e sem nenhuma interrupção, e é necessário abrangê-las numa enumeração suficiente e metódica.[48] (ibidem, p.39, tradução nossa)

Na *Regra VIII*, Descartes expõe que mesmo conhecendo e aplicando as sete regras anteriores na solução de algum problema que se queira resolver, só isso não é suficiente para conseguir uma conclusão do problema proposto, já que na sequência ordenada dos diversos itens, que estão inter-relacionados com o problema, pode haver algum item que a inteligência não possa intuir satisfatoriamente. Assim, não se pode dar continuidade à interpretação dos itens subsequentes e, consequentemente, não se pode relacionar o último item com o primeiro. Desse modo, fica comprometida a solução do problema por meio da aplicação do *método cartesiano*.

A *Regra VIII* estabelece que não se deve passar para uma posterior proposição particular da série estabelecida, sem antes estar convencido da veracidade da proposição anterior.

> Se, na série de objetos a procurar, apresenta-se qualquer coisa que a nossa inteligência não possa intuir assaz bem, é necessário deter-se aí, sem examinar o que se segue, mas abster-se de um trabalho supérfluo.[49] (ibidem, p.46, tradução nossa)

---

47 *"Pour distinguer les choses les plus simples de celles qui sont compliquées et mettre de l'ordre dans leur recherche, il faut, dans chaque série de choses où nous avons directement déduit quelques vérités les unes des autres, remarquer ce qui est le plus simples et comment tout le reste en est plus ou moins ou également éloigné."*

48 Cf. nota 38 deste capítulo.

49 *"Si, dans la série des objets à chercher, il se présente quelque chose que notre entendement ne puisse assez bien voir par intuition, il faut s'y arrêter, sans examiner ce qui suit, mais s'abstenir d'un travail superflu."*

Para dissolver este impasse que impossibilita a utilização eficaz das regras, Descartes propõe estudar essa questão sob duas perspectivas: a do homem, como ser capaz de adquirir conhecimentos, e a dos objetos que se podem conhecer.

> E certamente, observamos que em nós só a inteligência é capaz de ciência: mas que outras faculdades podem ajudar ou criar-lhe impedimentos: estas são a imaginação, os sentidos e a memória. É é necessário ver, por ordem, em que cada uma dessas faculdades, em particular, pode ser um obstáculo, a fim de o evitarmos; ou bem em que elas nos possam ser úteis, a fim de empregarmos todos os recursos.[50] (ibidem, p.53-4, tradução nossa)

Ainda na *Regra VIII*, Descartes explica o auxílio que se pode obter por intermédio da inteligência, da imaginação, dos sentidos e da memória para proporcionar ao homem uma intuição pura de cada item segundo a enumeração do objeto investigado e, desse modo, encontrar conexões ordenadamente lógicas e adequadas que permitam ao indivíduo ter uma noção completa do objeto pesquisado. Uma exposição mais pormenorizada, referente às faculdades citadas (inteligência, memória, imaginação e sentido) será feita na *Regra XII* do primeiro livro.

Na mesma regra, Descartes salienta que é preciso estudar a natureza dos objetos de pesquisa e, para tal propósito, é necessário que se investiguem dois tipos, isto é, os objetos de natureza totalmente simples e objetos de natureza complexa ou composta. Segundo Descartes, esse estudo seria realizado, respectivamente, no segundo e terceiro livro; porém, como se pode constatar no tratado cartesiano (*Regras para a direção do espírito*), o segundo livro está inacabado

50 *"Et certes, nous remarquons qu'en nous l'entendement seul est capable de science: mais que trois autres facultés peuvent l'aider ou lui créer des empêchements: ce sont l'imagination, les sens et la mémoire. Il est donc nécessaire de voir par ordre en quoi chacune de ces facultés en particulier peut être un obstacle, afin de nous en garder; ou bien en quoi elle peut nous être utile, afin d'en employer toutes les ressources."*

(constando somente da *Regra XIII* até a *XVIII* e os títulos das *Regras XIX, XX e XXI*) e o terceiro livro nem sequer foi esboçado.

Feitas essas considerações referentes à *Regra VIII*, aborda-se a regra posterior, isto é, a *Regra IX*.

> É necessário dirigir toda a penetração do nosso espírito sobre este que é o menos importante e o mais fácil, e nisso nos determos bastante tempo, até que nos tenhamos habituado a ver a verdade por intuição de uma maneira distinta e evidente.[51] (ibidem, p.57, tradução nossa)

Descartes expõe, conforme exemplos, como se pode adquirir e aperfeiçoar a faculdade de discernir por intuição cada item da sequência ordenada que compõe a enumeração do objeto a ser pesquisado; isto é, para Descartes, as duas faculdades pertencentes ao intelecto humano são a perspicácia[52] e a sagacidade.[53] A perspicácia servirá para discernir por intuição o que é verdadeiro e admissível daquilo que não o é, em cada parte que compõe uma proposição geral. Já a sagacidade proporcionará deduzir com clareza cada uma dessas proposições particulares e suas inter-relações numa sequência cíclica e, assim, estabelecer uma conclusão verdadeira.

> Certamente, conhecemos a maneira em que se deve usar a intuição intelectual, somente esta seria por comparação com os nossos

51 *"Il faut diriger toule la pénétration de notre esprit sur ce qui est le moins important et le plus facile, et nous y arrêter assez longtemps, jusqu'à ce que nous ayouns pris l'habitude de voir la vérité par intuition d'une manière distincte et nette."*

52 Conforme Abbagnano (1999, p.759), "rapidez mental, segundo Platão (Carm., 160 a); justeza de metas, segundo Aristóteles (Et. nic., VI, 9, 1142 b 6). A primeira definição capta a rapidez do processo intelectivo; a outra, seu êxito; parecem definições complementares".

53 Segundo Abbagnano (1999, p.866), "Aristóteles identificou a sagacidade com o ato de apreender (Et. nic., VI, 10, 1143a 17), e Kant definiu-a como 'o Dom natural que consiste em julgar por antecipação (*judicium praevium*) onde pode ser encontrada a verdade e de aproveitar as menores circunstâncias para descobri-la'".

> olhos. Uma vez que, aquele que quer ver simultaneamente de relance um número grande de objetos, não vê distintamente nenhum deles; e igualmente, aquele que tem o hábito de prestar atenção a um grande número de coisas simultaneamente por um só ato de pensamento adquire um espírito confuso. Mas os artesãos que se ocupam de obras minuciosas e que se habituaram a dirigir atentamente a penetração do seu olhar sobre cada ponto em particular adquirem pela repetição do ato o poder de distinguir perfeitamente o que há de menor e delicado; assim também, os que jamais espalham seu pensamento sobre diversos objetos simultaneamente, mas o ocupam sem cessar inteiramente em considerar o que há de mais simples e mais fácil, adquirem a perspicácia.[54] (ibidem, p.57-8, tradução nossa)

Descartes, na *Regra X*, expõe alguns cuidados que devem ser obedecidos para chegar à verdade e, novamente, salienta que é necessário analisar, numa ordem crescente, desde o item mais simples do que se quer pesquisar. Assim, convém primeiro exercitar-se nos itens mais fáceis, porém com método, com o intuito de se acostumar à busca da verdade das coisas por caminhos óbvios e conhecidos. A citação seguinte expõe aspectos importantes dessa regra:

> Também, aconselhamos confiar nestas pesquisas com método, e o método, nestas matérias de menor importância, não difere habitualmente da observação constante da ordem que existe no mesmo objeto ou que se inventa com sutileza. Por exemplo, suponhamos

---

54 *"Certes, nous connaissons la manière dont il faut user de l'intuition intellectuelle, ne serait ce que par comparaison avec nos yeux. Car, celui qui veut regarder du même coup d'œil un grand nombre d'objets à la fois, ne voit distinctement rien d'eux; et pareillement, celui qui a coutume de faire atteation à un grand nombre de choses à la fois, par un seul acte de la pensée, a l'esprit confus. Mais les artisans qui s'occupent d'ouvrages minutieux et qui se sont habitués à diriger attentivement la pénétration de leur regard sur chaque point en particulier, acquièrent par l'usage le pouvoir de distinguer parfaitement ce qu'il y a de plus petit et de plus délicat; de même aussi ceux qui n'éparpillent jamais leur penseé sur divers objets à la fois, mais l'occupent sans cesse tout entière à considérer ce qu'il y a de plus simple et de plus facile, acquièrent de la perspicacité."*

que queiramos ler uma escrita de caracteres desconhecidos: certamente não aparece nenhuma ordem, mas todavia imaginamos uma, seja para examinar todas as hipóteses que se pode fazer relativamente a cada sinal ou cada palavra ou cada frase em particular, seja ainda para as dispor de maneira a conhecer por enumeração tudo o que pode ser deduzido. Sobretudo, é necessário evitar perder seu tempo em querer decifrar semelhantes coisas fortuitamente e sem arte, porque poderíamos mesmo as encontrar frequentemente sem arte e, algumas vezes, mais rapidamente pode ser com a sorte que por meio de um método, elas não enfraqueceriam menos a luz do espírito e o habituariam tão bem a vãs puerilidades que depois se deteria sempre à superfície das coisas, sem poder penetrá-las mais intensamente. Mas, no entanto, não vamos cair no erro dos que somente ocupam seu pensamento com coisas sérias e demasiado elevadas, das quais, depois de múltiplos trabalhos, adquirem uma ciência confusa, ao passo que desejem uma profunda? É, portanto, sobre o que há de fácil que devemos primeiramente exercer-nos, mas com método, para que, por vias abertas e conhecidas, nos acostumemos como brincar a penetrar sempre até à íntima verdade das coisas. Por esse meio, com efeito, é pouco a pouco então, em um tempo mais curto que nunca teríamos ousado esperar, que também nós teremos consciência de poder com igual facilidade deduzir de princípios evidentes várias proposições que parecem muito difíceis e complicadas.[55] (ibidem, p.63-4, tradução nossa)

---

55 *"Aussi avons nous donné l'avertissement de se livrer à ces recherches avec méthode, et la méthode, dans ces matières de moindre importance, ne diffère pas habituellement de l'observation constante de l'ordre qui existe dans l'objet même ou qu'on invente avec finesse. Par exemple, supposons que nous voulions lire une écriture aux caractères inconnus: aucun ordre certes n'y apparaîl, mais nous en imaginons un pourtant, soit pour examiner toutes les hypothèses qu'on peut faire touchant chaque signe ou chaque mot ou chaque phrase en particulier; soit encore pour les disposer de manière à connaître par énumération tout ce qui peut en être déduit. Surtout il faut se garder de perdre son temps à vouloir deviner de pareilles choses fortuitemennt et sans art, car, pourrait-on même les trouver souvent sans art et parfois plus rapidement peut-être avec de la chance qu'à l'aide d'une méthode, elles n'en affaibliraient pas moins la lumière de l'esprit et l'habitueraient si bien à de vaines puérilités que*

Nas *Regras X* e *XI*, Descartes aborda duas operações necessárias para seu método, isto é, as combinações da intuição intelectual e a enumeração exposta. Na décima primeira regra aborda esses dois aspectos:

> Depois da intuição de algumas proposições simples, quando delas tiramos outra conclusão, é útil percorrer essas proposições num movimento contínuo e ininterrupto do pensamento, refletir em suas relações mútuas, e conceber distintamente várias ao mesmo tempo tanto quanto se pode; é assim, com efeito, que nosso conhecimento se torna muito mais certo e que se aumenta sobretudo a extensão de nosso espírito.[56] (ibidem, p.66, tradução nossa)

> Por exemplo, suponhamos que, por várias operações, eu tenha chegado a conhecer primeiro qual a relação que existe entre uma primeira grandeza e uma segunda, depois entre uma segunda e uma terceira, em seguida entre uma terceira e uma quarta, e enfim entre uma quarta e uma quinta: não vejo por isso que relação há entre a primeira e a quinta e não a posso deduzir das que já são conhecidas, a menos que me recorde todas. É porque é necessário que meu

---

*dans la suite il s'arrêterait toujours à la superficie des choses sans pouvoir y pénétrer plus intimement. Mais, en attendant, n'allons pas tomber dans l'erreur de ceux qui n'occupent leur penseé que de choses sérieuses et trop élevées, dont, après de multiples travaux, ils acquièrent une science confuse, tandis qu'ils en désirent une profonde? C'est donc sur ce qu'il y a de plus facile que nous devons d'abord nous exercer, mais avec méthode, afin que par des voies ouvertes et connues nous nous accoutumions comme en nous jouant à pénétrer toujours jusqu'à l'intime vérité des choses. Par ce moyen, en effet, c'est peu à peu ensuite et dans un temps plus court que nous n'aurions jamais osé l'espérer, que nous aussi nous aurons conscience de pouvoir avec une égale facilité déduire de principes évidents plusieurs propositions qui paraissent très difficiles et compliquées."*

56 *"Après l'intuition de quelques propositions simples, quand nous en tirons une autre conclusion, il est utile de parcourir les mêmes propositions dans un mouvement continu et nulle part interrompu de la penseé, de rèflèchir à leurs rapports mutuels, et d'en concevoir distinctement plusieurs à la fois, autant qu'on le peut; c'est ainsi, en effet, que notre cannaissance devient beaucoup plus certaine et que s'augmente surtout l'étendue de notre esprit."*

> pensamento as percorra de novo, até que eu passe da primeira à última com uma tal rapidez que, sem deixar quase nenhum papel à memória, pareça ver o todo ao mesmo tempo por intuição.[57] (ibidem, p.68, tradução nossa)

Na *Regra XII*, a última do primeiro livro, *Regras para a direção do espírito*, Descartes salienta que é necessário ao homem utilizar-se dos vários recursos que estão à sua disposição, a saber, *a inteligência*, faculdade que possibilita conhecer em que consiste aquilo que existe ou que pode existir e as sucessões possíveis de relações que podem existir; *a imaginação*, faculdade que possibilita conservar, reproduzir, associar, dissociar e combinar as imagens daquilo que existe ou que pode existir; *os sentidos*, faculdade que possibilita ao homem receber as impressões externas mediante certos órgãos – visão, audição, olfato, paladar e o tato –; e *a memória*, faculdade que possibilita ao homem conservar e evocar os conhecimentos adquiridos.

> Por fim, é necessário servir-se de todos os auxílios da inteligência, da imaginação, dos sentidos e da memória, seja para ter uma intuição distinta das proposições simples, seja para pôr entre as coisas que procuramos e as que sabemos uma ligação conveniente que permita reconhecê-las, seja para encontrar as coisas que devem ser compradas entre si, sem negligenciar nenhum recurso da indústria (habilidade) humana.[58] (ibidem, p.71, tradução nossa)

---

57 *"Par exemple supposons que, par plusieurs opérations, je sois arrivé à connaître d'abord quel rapport existe entre une première grandeur et une seconde, puis entre une seconde et une troisième, ensuite entre une troisième et une quatrième, et enfin entre une quatrième et une cinquième: je ne vois pas pour cela quel rapport il y a entre la première et la cinquième et je ne puis le déduire de ceux qui sont déjà connus, à moins de me les rappeler tous. C'est pourquoi il est nécessaire que ma pensée les percoure de nouveau, jusqu'à ce que je passe du premier au dernier avec une telle rapidité que, sans laisser à la mémoire presque aucun rôle, je paraisse voir le tout à la fois par intuition."*

58 *"Enfin, il faut se servir de tous les secours de l'entendement, de l'imagination, des sens et de la mémoire, soit pour avoir une intuition distincte des propositions simples, soil pour mettre entre les choses qu'on cherche et celles que l'on sait une liaison*

> Esta regra é a conclusão de tudo o que foi precedentemente mencionado e ensina em geral o que era necessário explicar em particular: eis como.
>
> No conhecimento há somente dois pontos a considerar, a saber, nós que conhecemos e os objetos a conhecer. Em nós, há somente quatro faculdades que nos podem servir para este uso: são a inteligência, a imaginação, os sentidos e a memória. Certamente, só a inteligência é capaz de perceber a verdade, contudo deve ser auxiliada pela imaginação, os sentidos e a memória, para nada negligenciar por acaso daquilo que se oferece à nossa habilidade. Do aspecto da realidade, é suficiente examinar três coisas, a saber, primeiro o que se apresenta espontaneamente, em seguida como se conhece por um outro lado um objeto determinado, e enfim quais deduções se podem tirar de cada um deles. Esta enumeração parece-me completa, sem nada a omitir absolutamente daquilo a que se pode estender à habilidade humana.[59] (ibidem, p.71-2, tradução nossa)

Ele ainda destaca que a utilização de seu método em geometria não tira o rigor das demonstrações, já que a natureza das demonstrações em Matemática consiste em descobrir e organizar as relações rigorosamente lógicas existentes entre a hipótese e a tese, porém esse encadeamento lógico é o resultado de um procedimento da atividade heurística.

---

*convenable permettant de les reconnaître, soit pour trouver les choses qui doivent être comparées entre elles, sans négliger aucune ressource de l'industrie humaine."*

59 *"Cette règle est la conclusion de tout ce qui a été dit précédemmment et enseigne en général ce qu'il était nécessaire d'expliquer en particulier: voici comment."*
*"Dans la connaissance il n'y a que deux points à considerér, savoir: nous qui connaissons et les objets qui sont à connaître. En nous, il y a seulement quatre facultés qui peuvent nous servir à cet usage: ce sont l'entendement, l'imagination, les sens et la mémoire. Seul, certes, l'entendement est capable de percevoir la vérité, toutefois il doit être aidé par l'imagination, les sens et la mémoire, pour ne rien négliger par hasard de ce qui s'offre à notre industrie. Du côté de la réalité, il suffit d'examiner trois choses, savoir: d'abord ce qui se présente spontanément, ensuite comment on connaît par un autre un objet déterminé, et enfin qulles déductions on peut tirer de chacun d'eux. Cette énumération me semble complète, sans rien omettre absolument de ce à quoi peut s'étendre l'industrie humaine."*

Como já foi explicitado em linhas anteriores, os sentidos internos têm seu significado e importância no método cartesiano. Mas nem por isso Descartes deixa de focalizar os sentidos externos do corpo.

Ele também destaca as qualidades sensíveis, apreendidas pela sensação, que compõem o domínio dos sensíveis próprios, que são objetos especiais e próprios de cada um dos órgãos dos sentidos (visão, audição, olfato, paladar e o tato), e dos sensíveis comuns que são o objeto de vários sentidos (extensão, dimensões, formas, figuras e movimento).

Descartes novamente deixa patente que para o homem conhecer no que consiste o objeto e que relações há entre tal objeto, ele deve reconhecer e empregar as múltiplas faculdades (inteligência, memória, imaginação e os sentidos) que estão a sua disposição para compreender esse conjunto de elementos que compõe o objeto investigado.

Na citação, Descartes deixa explícitas as relações entre a inteligência e a memória, isto é, a inteligência compreende uma dupla série de funções. As funções, tais como concepção das ideias,[60] juízo e raciocínio, têm por propósito realizar uma organização coerente das impressões recebidas pelos sentidos externos (visão, audição, olfato, paladar e o tato) e internos (aqueles que estruturam ideias abstratas e empreendem pensamentos não sensoriais); essas funções compreendem o que se denomina pensamento.[61] As outras funções têm por intuito conservar todos os materiais do conhecimento, imagens e ideias, e as associações voluntárias e não voluntárias desses materiais; estas funções são as da memória e da associação das ideias.

---

60 Representações intelectuais de quaisquer objetos que existem ou que possam existir (Abbagnano, 1999).

61 Conforme Abbagnano (1999, p.751*)*, "[...] esse termo designa a atividade do intelecto em geral, distinta da sensibilidade, por um lado, e da atividade prática, por outro. Neste significado Platão emprega, às vezes, a palavra νόησῖς, como quando designa com ela todo o conhecimento intelectivo, que encerra tanto o pensamento discursivo (διάνοια) quanto o intelecto intuitivo (νοῦς) (Rep., VII, 534a), e outras vezes a palavra διάνοια,como faz quando define o pensamento em geral".

Com efeito, a inteligência pode ser movida pela imaginação ou ao contrário agir sobre ela; da mesma maneira a imaginação pode agir sobre os sentidos pela força motriz aplicando-os aos seus objetos, ou ao contrário eles podem agir sobre ela limando as imagens dos corpos; além disso, a memória, pelo menos a que é corporal e semelhante à lembrança das bestas brutas, não é de modo algum distinta da imaginação. Conclui-se com certeza que, se a inteligência se ocupa do que nada tem de corporal ou de semelhante ao corporal, não pode ser ajudada pelas faculdades da qual acabamos de falar, mas ao contrário, para que não encontre nelas impedimentos, é necessário afastar os sentidos e despojar tanto quanto possível a imaginação de toda impressão distinta. Se, além disso, a inteligência se propõe a examinar um objeto que pode ser relacionado com um corpo, é a ideia deste objeto que é necessário formar – o mais distintamente possível – na imaginação; para o fazer mais comodamente, deve-se mostrar aos sentidos externos o próprio objeto que esta ideia representará. Uma pluralidade de objetos não pode facilitar à inteligência a intuição distinta de cada um deles em particular. Mas para tirar de uma pluralidade uma só dedução, o que se deve frequentemente, será necessário rejeitar as ideias que se têm das coisas tudo o que não reclamar uma atenção mediata, a fim de que o resto seja mais fácil para reter na memória. Da mesma maneira, não serão, então, as próprias coisas que será necessário apresentar aos sentidos externos, mas antes algumas das suas figuras resumidas, e estas, contanto que bastem para evitar um erro de memória, serão tanto mais cômodas, que serão mais breves. Todo aquele que observe tudo isto nada omitirá de tudo, ao que me parece, do que se relaciona com esta parte da nossa exposição.[62] (ibidem, p.78-80, tradução nossa)

62 *"L'entendement en effet peut être mû par l'imagination ou au contraire agir sur elle; de même l'imagination peut agir sur les sens par la force motrice en les appliquant à leurs objets, ou au contraire eux peuvent agir sur elle en y peignant les images des corps; d'autre part la mémoire, du moins celle qui est corporelle et semblable au souvenir des bêtes brutes, n'est aucunement distincte de l'imagination. On en conclut avec certitude que, si l'entendement s'occupe de ce qui n'a rien de corporel ou de semblable au corporel, il ne peut pas être aidé par les facultés dont nous venons de*

Com as regras já estabelecidas, Descartes salienta, nas próximas citações, que mesmo tendo o conhecimento desses princípios e regras, o homem continua sujeito ao erro, e de fato se engana muitas vezes, tomando o falso pelo verdadeiro. Assim, é necessário conhecer os processos sofísticos pelos quais o erro se apresenta com as aparências da verdade e, assim, determinar que indícios permitem, em conformidade com a razão, distinguir a verdade do erro. Além disso, convém explicitar que se pode encontrar neste processo mental, em relação à verdade, quatro estados diferentes: a verdade pode ser para esse processo mental como não existente, isto é, o estado de ignorância;[63] a verdade pode aparecer para esse processo mental como possível, isto é, o estado da dúvida;[64] a verdade pode apresentar-se para esse processo mental como provável, isto é, o estado de opinião;[65] enfim, a verdade pode manifestar-se para esse processo

---

*parler, mais au contraire, pour qu'il ne trouve pas en elles d'empêchement, il faut écarter les sens et dépouiller autant que possible l'imagination de toute impression distincte. Si, d'autre part, l'entendement se propose d'examiner un objet qui peut être rapporté à un corps, c'est l'idée de cet objet qu'il faut le plus distinctement possible former dans l'imagination; pour le faire plus commodément, on doit montrer aux sens externes l'objet lui-même que cette idée représentera. Une pluralité d'objets ne peut faciliter à l'entendement l'intuition distincte de chacun d'eux en particulier. Mais pour tirer d'une pluralité une seule déduction, ce qu'on doit souvent faire il faudra rejeter des idées qu'on a des choses tout ce qui ne réclamera pas une attention immédiate afin que le reste soit plus facile à retenir dans la mémoire. De la même manière, ce ne seront pas alors les choses mêmes qu'il faudra présenter aux sens externer mais plutôt quelques unes de leurs figures abregées, et celles ci, pourvu qu'elles suffisent à éviter une erreur de mémoire, seront d'autant plus commodes qu'elles seront plus brèves. Quiconque observara tout cela n'omettra rien du tout, à ce qu'il me semble, de ce qui se rapporte à cette partie de notre exposé."*

63 A ignorância é um estado puramente negativo, que consiste na ausência de todo conhecimento relativo ao objeto pesquisado (Abbagnano, 1999).

64 A dúvida é um estado de equilíbrio entre a afirmação e a negação, que se assenta na hesitação de afirmar ou negar o conhecimento relativo ao objeto pesquisado (Abbagnano, 1999).

65 A opinião é o estado que afirma com receio de se enganar, que se funda no juízo favorável ou não, que se forma sobre o conhecimento relativo ao objeto pesquisado (Abbagnano, 1999).

mental como evidente, isto é, o estado da certeza.[66] Por fim, conhecer essa verdade, quer dizer, conhecer o conjunto de relações evidentes sobre o objeto pesquisado, é tarefa da inteligência, contudo deve ser auxiliada pela imaginação, os sentidos e a memória.

> Agora, vamos abordar também nosso segundo ponto, distinguir cuidadosamente as noções que temos das coisas simples das noções que são compostas e ver numas e outras em que se pode encontrar o erro, a fim de evitarmos, e quais são as que podem ser conhecidas com certeza, a fim de nos ocuparmos somente delas. Neste lugar, como no que precede, é necessário fazer certas suposições que talvez todas as pessoas não nos conceda; mas pouco importa que não as julguem mais verdadeiras que os círculos imaginários que servem aos Astrônomos para descreverem seus fenômenos, contanto que pelo seu auxilio se distingue, a propósito de qualquer coisa, que conhecimento pode ser verdadeiro ou falso.[67] (ibidem, p.80, tradução nossa)

> Dizemos, em segundo lugar, que as coisas chamadas simples e, por intermédio da relação com nosso entendimento, são puramente intelectuais, ou puramente materiais, ou comuns. São puramente intelectuais as que são conhecidas pelo entendimento graças a uma luz inata e sem a ajuda de nenhuma imagem corporal. Ora, é certo, há algumas, e não podemos formar nenhuma ideia corporal que nos represente o que é o conhecimento, o que é a dúvida, o que é a

66 A certeza é o estado que afirma sem receio de se enganar, que se estabelece no juízo favorável, que se forma sobre o conhecimento relativo ao objeto pesquisado (Abbagnano, 1999).

67 *"Maintenant, nous allons aborder aussi notre second point, distinguer soigneusement les notions que nous avons des choses simples des notions qui en sont composées et voir dans les une et autres où peut se trouver l'erreur, afin ne nous en garder, et quelles sont celles qui peuvent être connues avec certitude, afin de nous occuper d'elles seules. En ce lieu, comme en ce qui précède, il faut faire certaines suppositions que peut-être tout monde ne concède pas; mais peu importe que même on neles croie pas plus vraies que les cercles imaginaires qui servent aux Astronomes à décrire leurs phénomènes, pourvu que par leur secours on distingue, à propos de n'importe quoi, quelle connaissance peut être vraie ou fausse."*

> ignorância, assim mesmo o que é a ação da vontade, que é permitido chamar volição, e coisas semelhantes, que portanto conhecemos todas realmente e tão facilmente que nos basta para isso ter recebido a razão em partilha. Puramente materiais são as coisas que sabemos somente existir nos corpos, como a figura, a extensão, o movimento etc. Enfim, devemos chamar comuns as que são atribuídas ora aos objetos corporais, ora aos espíritos, sem distinção, como a existência, a unidade, a duração e coisas semelhantes. É a isto ainda que devem reportar-se essas noções comuns que são como laços unidos entre elas outras naturezas simples e sobre a evidência das quais se apoiam todas as conclusões dos raciocínios.[68] (ibidem, p.82-3, tradução nossa)

Nesta passagem, Descartes distingue condição necessária e condição contingente, úteis na atividade heurística e na busca da verdade; na primeira, uma proposição é dividida num conjunto de proposições mais simples com relação à proposição original e se forma uma série de proposições logicamente encadeadas; quando nessa série há uma condição restritiva, não se verificando, e como consequência, a proposição original também não se verifica, a condição restritiva é dita necessária. A segunda significa que a condição não é necessária, mas depende das circunstâncias.

68 *"Nous disons, en second lieu, que les choses appelées simples par repport à notre entendement sont purement intellecutuelles, ou purement matérielles, ou communes. Sont purement intelectuelles, celles qui sont connues par l'entendement grâce à une lumière innée et sans l'aide d'acucune image corporelle. Or il y en a quelques--unes de telles, c'est certain, et on ne peut former aucune idée corporelle qui nous représente ce qu'est la connaissance, ce qu'est le doute, ce qu'est l'ignorance, de même ce qu'est l'action de la volonté, qu'il est permis d'appeler volition, et choses semblables, que nous connaissons pourtant toutes réellement et si facilement qu'il nous suffit pour cela d'avoir reçu la raison en partage. Purement matérielles sont les choses qu'on sait n'exister que dans les corps, comme la figure, l'étendue, le mouvement etc. Enfin, on doit appeler communes, celles qui sont attribuées tantôt aux objets corporels, tantôt aux esprits, sans distiction, comme l'existence, l'unité, la durée, et choses semblables. C'est là encore que doivent se repporter ces notions communes qui sont commedes liens unissant entre elles d'autres natures simples et sur l'évidence desquelles s'appuient toutes les conclusions des raisonnements."*

Dizemos, em quarto lugar, que a ligação destas coisas simples entre si é ou necessária ou contingente. É necessária quando uma está implicando tão intimamente o conceito da outra que não podemos conceber distintamente uma ou outra, se as julgamos separadas entre si. É desta maneira que a figura está unida à extensão, ao movimento, à duração ou ao tempo etc., porque não é possível conceber uma figura privada de toda a extensão, nem um movimento privado de toda a duração. Do mesmo modo ainda, se digo que quatro e três fazem sete, trata-se aí de uma composição necessária; com efeito, não concebemos distintamente o número sete, sem nele incluir intimamente o número três e o número quatro. Igualmente, tudo o que se demonstra concernente às figuras e aos números tem necessariamente o objeto sobre o qual se afirma. E não é somente nas coisas sensíveis que se encontra esta necessidade, mas ainda em outros lugares: por exemplo, se Sócrates diz que duvida de tudo, segue-se necessariamente que compreende ao menos que duvida; do mesmo modo, que sabe que pode haver alguma coisa de verdadeiro ou de falso etc., visto que estas consequências estão ligadas necessariamente à natureza da dúvida. Quanto à união contingente é a que não implica entre as coisas nenhuma ligação indissolúvel: como quando se diz que um corpo é animado, que um homem está vestido etc. Há ainda um grande número de coisas que são frequentemente ligadas entre si de uma maneira necessária e que a maior parte as organiza entre as contingentes, não notando a relação que existe entre elas, por exemplo esta proposição: sou, portanto Deus é; do mesmo modo: compreendo, portanto tenho uma inteligência distinta do corpo etc. Enfim, devemos notar que a essência da maioria das proposições necessárias são contingentes: assim, ainda que, do fato que eu existo tire a conclusão certa de que Deus existe, não me é permitido, partindo do fato que Deus existe, afirmar que eu também existo.[69] (ibidem, p.84-6, tradução nossa)

---

69 *"Nous disons, en quatrième lieu, que la liaison de ces choses simples entre elles est ou nécessaire ou contingente. Elle est nécessaire, lorsque l'une est impliquée si intimement dans le concept de l'autre que nous ne pouvons pas concevoir distinctement l'une ou l'autre, si nous les jugeons séparées entre elles. C'est de cette manière que*

Dizemos, em quinto lugar, que jamais podemos nada compreender fora destas naturezas simples e da espécie de misturas ou composição que existe entre elas. E certamente, é frequentemente muito fácil considerar ao mesmo tempo várias ligações juntamente do que separar uma só das outras: posso, com efeito, por exemplo, conhecer o triângulo sem jamais ter pensado que neste conhecimento está ainda contido o do ângulo, da linha, do número três, da figura, da extensão etc.; isto não nos impede, portanto, de dizer que a natureza do triângulo é composta de todas estas naturezas e que elas são mais conhecidas que o triângulo, já que são elas que a inteligência descobre nele. No mesmo triângulo estão talvez, ainda, encerradas muitas outras naturezas que nos escapam, como a grandeza dos ângulos cuja soma é igual a dois retos e as relações inumeráveis que existem entre os lados e os ângulos, ou a capacidade da área etc.[70] (ibidem, p.86, tradução nossa)

---

*la figure est unie à l'étendue, le mouvement à la durée ou au temps, etc., parce qu'il n'est pas possible de concevoir une figure privée de toute étendue, ni un mouvement privé de toute durée. De même encore, si je dis que quatre et trois font sept, il s'agit là d'une composition nécessaire; nous ne concevons pas en effet distinctement le nombre sept, sans y inclure intimement le nombre trois et le nombre quatre. Pareillement, tout ce qu'on démontre concernant les figures et les nombres tient nécessairement à l'objet dont on affirme. Et ce n'est pas seulement dans les choses sensibles que se rencontre cette nécessité, mais encore ailleurs: par exemple, si Socrate dit qu'il doute de tout, il s'ensuit nécessairement qu'il comprend au moins qu'il doute; de même, qu'il sait qu'il peut avoir quelque chose de vrai ou de faux etc., car ces conséquences sont liées nécessairement à la nature du doute. Quant à l'union contingente, c'est celle qui n'implique entre les choses aucune liaison indissoluble: comme quand on dit qu'un corps est animé, qu'un homme est vêtu etc. Il y a encore un grand nombre de choses qui sont souvent liées entre elles d'une manière nécessaire et que la plupart rangent parmi les con tingentes, en ne remarquant pas la relation qui existe entre elles, par exemple cette proposition: je suis, donc Dieu est; de même: je comprends, done j'ai une intelligence distincte du corps etc. Enfin, on doit noter que les conserves de la plupart des proprositious néccessaires sont contingentes: ainsi, quoique du fait que j'existe je tire la conclusion certaine que Dieu existe, il ne m'est pas pourtant permis, en partant du fait que Dieu existe, d'affirmer que moi aussi j'existe."*

70 *"Nous disons, en cinquiéme lieu, que nous ne pouvons jamais rien comprendre en dehors de ces natures simples et de l'espèce de mélange ou composition qui existe entre elles. Et certes, il est souvent plus facile d'en considérer en même temps plusieurs*

> Dizemos, em sexto lugar, que as naturezas por nós chamadas compostas nos são conhecidas, quer porque experimentamos o que elas são, quer porque as compomos nós mesmos. Experimentamos tudo o que percebemos pela sensação, tudo o que aprendemos dos outros, e geralmente tudo o que chega ao nosso entendimento, quer de um outro lugar, quer da contemplação refletida que ela tem de si própria. [...] Por outro lado, compomos nós próprios os objetos que compreendemos, cada vez que cremos existir neles qualquer coisa que nenhuma experiência não fez perceber à nossa inteligência imediatamente.[71] (ibidem, p.86-8, tradução nossa)

Como se analisou em passagens anteriores, convém ressaltar que a validade dos argumentos, quando se quer verificar a verdade ou falsidade das premissas, é estabelecida pela estrutura lógica e não pela constituição intrínseca dos enunciados que compõem essas premissas. Assim, a validade de um argumento dedutivo depende exclusivamente das relações que se determinam entre os conjuntos de sequências de premissas que produzem o enunciado e a conclusão dessa proposição. Portanto, se tal argumento dedutivo é válido, isso quer dizer que tais premissas estão inter-relacionadas com a

---

*jointes ensemble que d'en séparer une seule des autres: je puis en effet, par exemple, connaître le triangle sans avoir jamais pensé que dans cette connaissance est contenue encore celle de l'angle, de la ligne, du nombre trois, de la figure, de l'étendue etc.; cela ne nous empêche pas pourtant de dire que la nature du triangle est composée de toutes ces natures et qu'elles sont plus connues que le triangle, puisque ce sont elles que l'intelligence découvre en lui. Dans le même triangle sont peut être encore renfermées beaucoup d'autres natures qui nous échappeut, comme la grandeur des angles dont la somme égale deux droits es les relations innombrables qui existent entre les côtes et les angles, ou la contenance de l'aire etc."*

71 *"Nous disons, en sixième lieu, que les natures appelées par nous composées nous sont connues, soit parce que nous expérimentons ce qu'elles sont, soit parce que nous les composons nous mêmes. Nous expérimentons tout ce que nous percevons par la sensation, tout ce que nous apprenons des autres, et généralement tout ce qui parvient à notre entendement, soit d'ailleurs, soit de la contemplation réfléchie qu'il a de lui-même [...]. D'autre part, nous composons nous-mêmes les objets que nous saisissons, chaque fois que nous croyons exister en eux quelque chose qu'aucune expérience n'a fait percevoir à notre intelligence immédiatement."*

conclusão estabelecida, isto é, essa conclusão precisa ser verdadeira quando há também a verificação do conjunto de premissas.

> Dizemos, em sétimo lugar, que esta composição pode-se fazer de três modos, a saber, por impulsão, por conjectura ou por dedução. É por impulsão que compõem seus julgamentos sobre as coisas aquele que seu espírito traz a qualquer crença, sem que sejam persuadidos por alguma razão, mas somente determinada, quer por qualquer potência superior, quer por sua própria liberdade, quer por uma tendência da sua imaginação: a primeira influência jamais engana, a segunda raramente, a terceira quase sempre; mas a primeira não tem seu lugar aqui, porque não revela ponto de arte. A composição faz-se por conjectura quando, por exemplo, porque a água, estando mais afastada do centro do mundo que a terra, é também de uma essência mais sutil, e ainda porque o ar, achando-se acima da água, é também mais leve, conjeturaremos que acima do ar não há mais que um éter muito puro e muito mais subtil que o próprio ar etc. Tudo o que dessa maneira compomos certamente não nos engana, se julgamos que é somente provável, sem jamais afirmar que seja verdadeiro; mas tudo isso também não nos torna mais sábios.[72] (ibidem, p.88-9, tradução nossa)

---

72 *"Nous disons, en septième lieu, que cette composition peut se faire de trois façons, savoir par impulsion, par conjecture ou par déduction. C'est par impulsion que composent leurs jugements sur les choses ceux que leur esprit porte à quelque croyance, sans qu'ils soient persuadés par aucune raison, mais déterminés seulement, soit par quelquer puissance supérieure, soit par leur propre liberté, soit par une tendance de leur imaginatioin: la première influence ne trompe jamais, la seconde rarement, la troisiéme presque toujours; mais la première n'a pas place ici, parce qu'elle ne relève point de l'art. La composition se fait par conjecture quand, par ejemple, de ce que l'eau, étant plus éloigneé du centre du monde que la terre, est aussi d'une essence plus subtile, et encore de ce que l'air, se trouvant au-dessus de l'eau, est aussi plus léger, nous conjecturons qu'au-dessus de l'air il n'y a rien qu'un éther très our et beaucoup plus subtil que l'air lui-même etc. Tout ce que nous composons de cette manière ne nous trompe certes pas, si nous jugeons que c'est seulement probable, sans affirmer jamais que ce soit vrai; mais tout cela aussi ne nous rend pas plus savants."*

Resta, portanto, somente a dedução pela qual possamos compor as coisas de maneira a ser seguros da sua verdade. Portanto, pode haver nela também numerosos defeitos, como acontece se, por nada haver no nosso espaço pleno de ar que possamos perceber pela vista, o tato ou qualquer outro sentido, concluímos que este espaço é vazio, por uma má ligação da natureza do vazio com a deste espaço. É, assim, toda vez que de um objeto particular ou contingente julgamos que é possível deduzir qualquer coisa de geral e de necessária. Mas foi posto em nosso poder evitar este erro, na condição de jamais ligar as coisas entre si sem ver por intuição que a ligação de uma com a outra é inteiramente necessária, como acontece ao deduzir que nada pode ser figurado sem ser extenso, do fato que a figura tem uma ligação necessária com a extensão etc.[73] (ibidem, p.89, tradução nossa)

Tudo isto permite concluir, em primeiro lugar, que expulsemos distintamente e, em minha opinião, por uma enumeração suficiente, o que em primeiro lugar somente tínhamos podido mostrar confusa e grosseiramente, a saber que não há vias abertas ao homem para conhecer certamente a verdade fora da intuição evidente e da dedução necessária.[74] (ibidem, p.89-90, tradução nossa)

---

73 *"Reste donc la déduction seule par laquelle nous puissions composer les choses de manière à être sûrs de leur vérité. Il peut y avoir pourtant en elle aussi de très nombreaux défauts, comme il arrive si, de ce qu'il n'y a rien dans notre espace plein d'air que nous ne puissions percevoir par la vue, le tact ou quelque autre sens, nous en concluons que cet espace est vide, par une mauvaise liaison de la nature du vide avec celle de cet espace. Il en est ainsi toutes les fois que d'un objet particulier ou contingent nous jugeons qu'il est possible de déduire quelque chose de général et de nécessaire. Mais il a été mis en notre pouvoir d'eviter cette erreur, à condition de ne lier jamais des choses entre elles sans voir par intuition que la liaison de l'une avec l'autre est tout à fait nécessaire, comme il arrive en déduissant que rien ne peut être figuré sans être étendu, du fait que la figure a une liaison nécessaire avec l'etendue etc."*

74 *"Tout cela permet de conclure, en premier lieu, que nous avons exposé distinctement, et, à mon avis, par une énumération suffisant, ce que tout d'abord nous n'avions pu montrer que confusément grossièrement, savoir qu'il n'y a pas de voies ouvertes à l'homme pour connaître certainement la vérité en dehors de l'intuition évidente et de la deduction nécessaire."*

Descartes salienta novamente que se deve, na sequência de proposições que compõem um argumento, analisar pela intuição separadamente cada proposição, ou seja, de fato, todo este processo mental parte de uma intuição para chegar a outra intuição, por meio da dedução. No princípio, o conhecimento é formado por objetos e noções apreendidos por uma intuição espontânea, uma intuição sensível e uma intuição intelectual.

Posteriormente, Descartes expõe que quando se quer conhecer algo novo deve-se, primeiramente, relembrar, examinar, relacionar e introduzir fontes úteis de um conhecimento já existente que auxilie à apreensão desse novo. Assim, novamente, focaliza-se a importância da intuição, da inferência e do método dedutivo neste processo mental para que as proposições sejam compreendidas.

> Com tudo isso, com medo que o encadeamento dos nossos preceitos escape a alguém, dividimos tudo o que pode ser conhecido em proposições simples e em questões. Para as proposições simples, não damos outros preceitos que aquele que preparam nossa força de conhecimento para compreender por intuição não importa qual objeto de uma maneira mais distinta e a escrutá-los com mais sagacidade, porque estas proposições devem oferecer-se espontaneamente e não podem ser objeto de pesquisa. Isto é ao que nos fixamos nos doze primeiros preceitos e estimamos ter aí mostrado tudo o que pode, em nossa opinião, facilitar a qualquer maneira o uso da razão. Quanto às questões, umas são perfeitamente compreendidas, nesse caso mesmo que sua solução seja ignorada: é somente delas que trataremos nas doze regras que seguem imediatamente; as outras são imperfeitamente compreendidas e reservamo-las para as doze últimas regras.[75] Não é uma divisão encontrada sem plano; fizemo-la, quer para não ser forçado a nada dizer que pressuponha o conhecimento do que segue, quer para ensinar em primeiro lugar aquilo a que pensamos que é necessário também se aplicar primeiramente ao espírito

75 O desenvolvimento termina com a *Regra XVIII* e chegou à posteridade somente o enunciado das três regras seguintes (nota nossa).

para cultivar. Deve-se notar que, entre as questões que são perfeitamente compreendidas, pomos somente aquelas em que percebemos distintamente três coisas, a saber, que sinais permitem reconhecer aquilo que se procura quando ele se apresenta; de que precisamente somos obrigados a deduzi-lo; e como é necessário provar que há entre estes objetos uma tal dependência que um não saberia de modo algum mudar quando o outro não muda. Desse modo, temos todas as nossas premissas e somente resta mostrar a maneira de encontrar a conclusão, não certamente pela dedução de uma só coisa simples de um objeto determinado (uma vez que isso pode ser feito sem preceitos, como já se disse), mas resgatando um objeto determinado que depende de muitas coisas implicadas em conjunto, com uma tal arte que não tenha em nenhuma parte necessidade de uma maior profundidade de espírito para fazer a mais simples inferência.[76] (ibidem, p.94-6, tradução nossa)

---

76 *"Au reste, de peur que l'enchaînement de nos préceptes n'échappe à quelqu'un, nous divisons tout ce qui peut être connu en proprositions simples et en questions. Pour les propositions simples, nous ne donnons pas d'autres préceptes que ceux qui préparent notre force de connaissance à saisir par intuition n'importe quel objet d'une manière plus distincte et à le scruter avec plus de sagacité, parce que ces propositions doivent s'offrir spontanément et ne peuvent être objet de recherche. C'est ce à quoi nous nous sommes attaché dans les douze premiers préceptes et nous estimons y avoir montré tout ce qui peut, à notre avis, faciliter en quelquer manière l'usage de la raison. Quant aux questions, les unes sont parfaitement comprises, alors même que leur solution est ignoreé: c'est d'elles seules que nous traiterons dans douze règles qui suivent immédiatement; les autres sont imparfaitement comprises et nous les réservons pour les douze dernières règles. Ce n'est pas une division trouvée sans dessein: nous l'avons faite, soit pour ne pas être forcé de rien dire qui présuppose la connaissance de ce qui suit, soit pour enseigner en premier lieu ce à quoi nous pensons qu'il faut aussi s'appliquer d'abord pour cultiver l'esprit. On doit noter que, parmi les questions qui sont parfaitement comprises, nous plaçons seulement celles oú nous percevons distinctement trois choses, savoir: quels signes permettent de reconnaître ce qu'on cherche quand il se présente; de quoi précisémente nous sommes obligés de le déduire; et comment il faut prouver qu'il y a entre ces objets une telle dépendance que l'un ne saurait aucunement changer, quand l'autre ne change pas. De la sorte, nous avons toutes nos prémisses et il ne reste plus à montrer que la manière de trouver la conclusion, non pas certes en déduisant d'une seule chose simple un objet déterminé (car cela peut se faire sans préceptes, comme on l'a déjà dit), mais en dégageant un objet déterminé, qui dépend de beaucoup de chose impliquées*

As regras procedentes do segundo livro de *Regras para a direção do espírito* focam, novamente, alguns aspectos que revelam o caráter heurístico.

A *Regra XIII*, do segundo livro, foi enunciada por Descartes (ibidem, p.97, tradução nossa) deste modo:

> Se compreendemos perfeitamente uma questão, é necessário abstraí-la de todo o conceito supérfluo, deduzi-la à sua maior simplicidade e dividi-la em partes tão pequenas quanto possível enumerando-as.[77]

Como evidencia Descartes na próxima citação, utiliza-se a forma dialética, isto é, a maneira de raciocinar com método que procura a verdade por meio da oposição e conciliação de contradições lógicas (tese, antítese e síntese) com algumas modificações, que ele julga necessárias ao seu método de investigação da verdade:

> Primeiramente, em toda questão, deve haver necessariamente qualquer coisa de desconhecido, uma vez que de outro modo sua pesquisa seria vã; em segundo lugar, este desconhecido deve ser designado de alguma maneira, visto que de outro modo não seríamos determinados a procura-lo, mais do que qualquer outro objeto; em terceiro, somente pode ser assim designado por meio de qualquer outra coisa que seja reconhecida.[78] (ibidem, p.97, tradução nossa)
>
> Eis aqui que somente imitamos os dialéticos: para darem as formas dos silogismos, eles supõem que se conhecem os termos ou a matéria; nós também exigimos por antecipação aqui que a questão seja perfeitamente compreendida. Mas não distinguimos, como

---

*ensemble, avec un art tel qu'on n'ait besoin nulle part d'une plus grande profondeur d'esprit que pour faire la plus simple inférence."*

77 *"Si nous comprenons parfaitement une questions, il faut l'abstraire de tout concept superflu, la réduire à sa plus grande simplicité et la diviser en parties aussi petites que possible en les énumérant."*

78 Cf. nota 74 deste capítulo.

> eles, dois extremos e um meio: é da maneira seguinte que consideramos todo nosso objetivo. Primeiramente, em toda questão, deve haver necessariamente qualquer coisa de desconhecido, já que de outro modo sua pesquisa seria vã; em segundo lugar, este desconhecido deve ser designado de qualquer maneira, porque de outro modo não seríamos determinados a procurá-lo logo não importa qual o outro objeto; em terceiro, somente pode ser assim designado por meio de qualquer outra coisa que seja reconhecida.[79] (ibidem, p.97, tradução nossa)

Convém explicitar algumas noções e definições dos termos utilizados por Descartes. Definem-se *noções primeiras* ou *primeiros princípios* como aquilo que procede de alguma coisa.

Assim, pode-se dizer que os homens adquirem mediante a ação natural e necessária da razão algumas noções primárias e verdades que são intrínsecas ao conjunto de princípios que compõem os seus conhecimentos logicamente estabelecidos. Os princípios primeiros, antes de serem leis do pensamento, são inicialmente percebidos como leis das coisas. Toda *causa* origina-se de um princípio e, além disso, o termo *causa* designa aquilo de que uma coisa depende quanto à existência. Por fim, o termo *efeito* assinala o produto da ação causal e consequente que resulta do princípio, ou seja, o efeito deve proceder da causa, já que é em virtude da causa que aquele é produzido.

A *Regra XIV* foi formulada por Descartes (ibidem, p.107, tradução nossa) desta maneira:

---

79 *"Voici en quoi seulement nous imitons les Dialecticiens: pour donner les formes des syllogismes, ils supposent qu'on en connaît les termes ou la matière; nous aussi, nous exigeons d'avance ici que la question soit parfaitement comprise. Mais nous ne distinguons pas, comme eux, deux extrêmes et un moyen: c'est de la manière suivante que nous considérons tout notre sujet. D'abord, dans toute question, il doit y avoir nécessairement quelque chose d'inconnu, car autrement sa recherche serait vaine; deuxièmement, cet inconnu doit être désigné de quelque manière, car autrement nous ne serions pas déterminés à le chercher plulôt que n'importe quel autre objet; troisièmement, il ne peut être ainsi désigné que par le moyen de quelque autre chose qui soit connu."*

> A mesma regra deve ser aplicada à extensão real dos corpos e inteiramente proposta à imaginação com a ajuda de figuras puras e simples: Assim, com efeito, será muito mais distintamente compreendida pelo entendimento.[80]

Novamente, ele ressalta a importância e o auxílio da imaginação no processo da investigação, já exposto em linhas anteriores.

> Para utilizar, também, o auxílio da imaginação, é necessário notar que deduzindo um objeto determinado e desconhecido de um outro já conhecido anteriormente, não se encontra por isso toda vez um novo gênero de ser. Há somente uma extensão de todo nosso conhecimento que nos faz compreender que de uma maneira ou de outra o objeto procurado participa da natureza daqueles que nos foram dadas na proposição.[81] (ibidem, p.107, tradução nossa)

Na *Regra XV* é assinalada a importância de utilizar representações que resultam imediatamente da ação dos objetos externos sobre os sentidos; assim, são as sensações que fornecem as condições sensoriais da percepção, a saber, imaginação e memória, já abordadas em linhas anteriores. Uma vez que, segundo Descartes, " [há uma] maneira pela qual é necessário representar essas figuras, para que ao colocá-las mesmo sob nossos olhos, as suas imagens se formem mais distintamente na nossa imaginação, [o que] é um fato por si evidente" (ibidem, p.127, tradução nossa).

---

80 *"La même règle doit être appliquée à l'étendue réelle des corps et tout entière proposée à l'imagination à l'aide de figures pures et simples: ainsi, en effet, elle sera beaucoup plus distinctement comprise par l'entendement."*

81 *"Pour utiliser aussi le secours de l'imagination, il faut noter qu'en déduisant un objet déterminé et inconnu d'un autre déjà connu antérieurement, on ne trouve pas pour cela chaque fois un nouveaus genre d'être. Il y a seulement une extension de toute notre connaissance qui nous fait comprendre que d'une manière ou d'une autre l'objet cherché participe de la narture de ceux qui ont été donnés dans la proposition."*

> É também útil ordinariamente traçar estas figuras e apresentá-las aos sentidos externos, a fim de que seja mais fácil por este meio manter atento nosso pensamento.[82] (ibidem, p.127, tradução nossa)

A *Regra XVI* estabelece o procedimento de representar no papel tudo o que é preciso reter. Assim, essa atitude necessária possibilitará que a memória não se sobrecarregue com muitas informações, contribuindo para que a memória não nos forneça dados imprecisos e, com isso, a imaginação fique livre para contemplar outras ideias que se apresentem ao pensamento.

> Quanto ao que não requer a atenção imediata da inteligência, tudo sendo necessário à conclusão, vale mais designá-lo por notações mais breves que por figuras inteiras; assim a memória não se poderá enganar, e, entretanto, durante esse tempo, o pensamento não estará distraído a retê-lo, ao passo que se aplica a outras deduções.[83] (ibidem, p.129, tradução nossa)

Ao final dessa regra, ele propõe retomar no terceiro livro do seu tratado as quatro regras precedentes, mas tal intento não foi realizado. Desse modo, segundo Descartes (ibidem, p.135, tradução nossa),

> é necessário notar que temos ainda a intenção de nos servir das quatro regras precedentes na terceira parte deste *Tratado*, tomando-as de uma maneira um pouco mais ampla do que têm sido aquelas explicadas aqui, no momento adequado.[84]

---

82 *"Il est utile aussi ordinairement de tracer ces figures et de les présenter aux sens externes, afin qu'il soit plus facile par ce moyen de tenir notre pensée attentive."*

83 *"Quant à ce qui ne requiert pas l'attention immédiate de l'intelligence, tout en étant nécessaire à la conclusion, il vaut mieux le désigner par les notations les plus brèves que par des figures entières; ainsi la mémoire ne pourra se tromper, et néanmoins, pendant ce temps, la pensée ne sera pas distraite à le retenir, tandis qu'elles s'applique à d'autres déductions."*

84 *"Il faut noter que nous avons encore l'intention de nous servir des quatre règles précédentes dans la troisième partie de ce Traité, en les prenant d'une manière un*

Na *Regra XVII*, Descartes explica como se deve proceder na busca do conhecimento, fazendo-se valer da íntima dependência que cada objeto tem em relação aos outros e, com isso, utilizando-se da intuição para descobrir a verdade. Além disso, refere-se aos ensinamentos que as quatro regras precedentes podem proporcionar. Ali deixa registrado ainda que na *Regra XXIV* fará outros comentários e dará exemplos a respeito das regras anteriormente tratadas; porém, esse intento não foi realizado, visto que o *Tratado* de Descartes termina na *Regra XXI*.

> A dificuldade proposta deve ser diretamente percorrida, nela se fazendo abstração de alguns de seus termos conhecidos e os outros desconhecidos, e examinando por intuição a mútua dependência de cada um deles em relação aos outros, graças aos verdadeiros raciocínios.[85] (ibidem, p.136, tradução nossa)

*peu plus large qu'elles n'ont été ici expliquées, comme il sera dit en son lieu."*

85 *"La difficulté proposée doit être directement parcourue, en y faisant abstraction de ce que certains se ses termes sont connus et les autres inconnus, et en examinant par intuition la mutuelle dépendance de chacun d'eux par rapport aux autres, grâce aux vrais raisonnements."*

# 6
# A arte de resolver problemas de Polya

*Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.*

George Polya, *A arte de resolver problemas,* 1994

O desenvolvimento da Matemática nos Estados Unidos recebeu um grande impulso com a imigração de matemáticos europeus durante o período nazista. Dentre esses matemáticos esteve George Polya (1887-1985) que, certamente, determinou uma linha divisória nas pesquisas sobre os procedimentos heurísticos envolvidos na resolução de problemas, influenciando o surgimento de um novo campo de pesquisa em Educação Matemática.

Nascido em Budapeste, capital da Hungria, Polya ingressou inicialmente no curso de Direito, talvez por tratar-se da profissão de seu pai, porém o curso pareceu-lhe monótono, passando para Línguas e Literaturas. Interessou-se por Latim, Física, Filosofia e finalmente por Matemática tendo, em 1912, concluído o seu doutoramento.

Em 1913, mudou-se para Göttingen, onde conheceu David Hilbert (1862-1943). Assumiu um cargo na Universidade de Zurique, em 1914, onde conheceu Adolf Hurwitz (1859-1919). Nesse mesmo ano, por ocasião da Primeira Guerra Mundial, foi requisitado pelo serviço militar de seu país, mas não respondeu à convocação. O medo de ser preso por não ter respondido a essa convocação fez com que Polya regressasse à Hungria apenas após o término da Segunda Guerra Mundial. Em Zurique conheceu sua futura esposa, Stella Weber. Casaram em 1918 e permaneceram juntos até à morte de Polya.

Trabalhou, em 1924, com Godfrey Harold Hardy (1877-1947) e John Edensor Littlewood (1885-1977) em Oxford e Cambridge. Publicou a classificação de dezessete grupos de simetria bidimensional,[1] resultado que, mais tarde, viria a inspirar Escher. Em 1925, juntamente com Gábor Szegö (1895-1995) publicou *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* e *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*.

Em 1940, temendo que a Suíça fosse invadida pelos alemães, decidiu ir para os Estados Unidos aceitando, em 1942, um cargo de professor na Universidade de Stanford, na qual permaneceu até à sua aposentadoria, em 1953.

Dentre as suas publicações relacionadas com aspectos inerentes ao processo heurístico, focam-se nesse capítulo as seguintes obras: *How to Solve it*, *Mathematics and Plausible Reasoning* e *Mathematical Discovery*.

Para explicar e discutir o processo heurístico e os elementos que dele fazem parte, Polya elabora um *Pequeno dicionário de heurística*[2] com 67 artigos, dando o significado e os fundamentos de cada um deles. Desses artigos, abordam-se os que apresentam uma maior relação com as discussões que estão sendo feitas no presente livro.

---

1 Segundo Struik (1992, p.306), "Federov, em 1891, também descobriu que havia precisamente dezessete grupos de simetria bidimensional, de padrões repetidos (tal como num papel de parede). Redescoberto por G. Polya e P. Niggli em 1924".

2 O *Pequeno dicionário de heurística* faz parte do Capítulo 3 do livro *How to Solve it*, traduzido para o português, em 1994, com o título *A arte de resolver problemas*.

O primeiro verbete que consta no dicionário é *Analogia*. Analogia é definida como uma relação de semelhança entre objetos distintos, ou seja, dois objetos são análogos se as relações entre suas partes são coincidentes. Por exemplo: dois ângulos opostos pelo vértice são iguais; dois diedros opostos pela aresta são iguais. Assim, ângulos e diedros são análogos, já que possuem relações semelhantes.

> Analogia é uma espécie de semelhança. Objetos semelhantes coincidem uns com os outros em algum aspecto; objetos análogos coincidem em certas relações das suas respectivas partes. (Polya, 1994, p.29)

Descartes, nas *Regras I* e *III*, aponta que perceber a semelhança de relações entre os objetos é uma experiência fundamental e primordial para a construção do conhecimento. Dessa forma, segundo ele,

> [...] cada um pode ver por intuição intelectual que existe, que pensa, que um triângulo é limitado somente por três linhas, um corpo esférico por uma só superfície, e outros fatos semelhantes que são muito mais numerosos do que a maioria observa, em consequência do desdém que experimentam em voltar a sua inteligência para coisas tão fáceis. (Descartes, 1908, p.14-5, tradução nossa)

Polya, do mesmo modo que Descartes, considera que a analogia, ainda que em diferentes níveis, é um princípio essencial que pode levar à descoberta da resolução de um problema.

> A analogia permeia todo o nosso pensamento, a nossa fala cotidiana e as nossas conclusões triviais, assim como os modos de expressão artística e as mais elevadas conclusões científicas. Ela é empregada nos mais diferentes níveis. É comum o uso de analogias vagas, incompletas ou obscuras, porém a analogia pode alçar-se ao nível do rigor matemático. Todos os tipos de analogia podem desempenhar uma função na descoberta da solução e, por isso, não devemos desprezar nenhum deles. (Polya, 1994, p.29)

O próximo verbete, *Conhece um problema correlato?,* refere-se especificamente à resolução de problemas, mas está relacionado com o procedimento de estabelecer analogias, porque ao procurar um problema que seja correlato ao que se pretende resolver, tem-se que buscar relações semelhantes entre eles.

> Conhece um problema correlato? É difícil imaginar um problema absolutamente novo, sem qualquer semelhança ou relação com qualquer outro que já haja sido resolvido; se um tal problema pudesse existir, ele seria insolúvel. De fato, ao resolver um problema, sempre aproveitamos algum problema anteriormente resolvido, usando o seu resultado, ou o seu método, ou a experiência adquirida ao resolvê-lo. Além do que, naturalmente, o problema de que nos aproveitamos deve ser, de alguma maneira, relacionado com o nosso problema atual. Daí a pergunta: Conhece um problema correlato? (ibidem, p.36)

Ao estar diante de uma proposição que deve ser demonstrada ou refutada, supondo que se tenha uma compreensão global dessa, Polya propõe que se deve passar ao exame de suas partes principais, a hipótese e a conclusão, sendo necessário compreender perfeitamente cada uma delas. Em alguns casos, é preciso decompor algumas partes em outras mais específicas e examiná-las separadamente. Com efeito, segundo Polya,

> Decomposição e recombinação constituem importantes operações mentais.
>
> Examina-se um objeto que desperta o interesse ou provoca a curiosidade: a casa que se pretende alugar, um telegrama importante mas obscuro, qualquer objeto cujas finalidades e origem intrigam, ou qualquer problema que se queira resolver. Tem-se uma impressão do objeto como um todo, mas esta impressão possivelmente não é bastante definida. Um detalhe sobressai e sobre ele se focaliza a atenção. Em seguida, concentra-se num outro detalhe, depois ainda outro. Diversas combinações de detalhes podem apresentar-se e,

> um pouco depois, considera-se novamente o objeto como um todo, mas agora ele é visto de maneira diferente. Decompõe-se o todo em suas partes e recombinam-se as partes num todo mais ou menos diferente. (ibidem, p.41)

Para Descartes (1908, p.97, tradução nossa), na *Regra XIII*, "se compreendemos perfeitamente uma questão, é necessário abstraí-la de todo o conceito supérfluo, deduzi-la à sua maior simplicidade e dividi-la em partes tão pequenas quanto possível enumerando-as". E afirma, na *Regra VII*, que para conhecer por completo o objeto pesquisado deve-se enumerar as partes que o compõem para analisá-las e conhecer as relações que existem entre elas. No entanto, após a decomposição e recombinação das partes do objeto, nem sempre é elementar a reconstituição das operações mentais que levaram a um resultado. De fato,

> a observação do que aqui é proposto é necessária para admitir como certas essas verdades que, ditas anteriormente, são deduzidas dos princípios primeiros e conhecidas por meio de si mesmo, mas não imediatamente. Com efeito, isto se faz às vezes por um encadeamento tão longo de consequências que após termos atingido essas verdades, não é fácil refazermos o percurso que para aí nos conduziu; é por isso que dizemos ser necessário remediar a fraqueza da memória por uma espécie de movimento contínuo do pensamento. Se, portanto, por exemplo, diversas operações me fizerem conhecer imediatamente que relação há entre as grandezas *A* e *B*, depois entre *B* e *C*, depois entre *C* e *D*, e enfim entre *D* e *E*, eu não vejo por isso qual é esta [relação] que existe entre *A* e *E*, e não posso fazer uma ideia precisa segundo as relações já conhecidas, a menos que me lembre de todas. Eis porque percorri certo número de vezes as espécies de movimento contínuo da imaginação, a qual vê simultaneamente cada objeto em particular e o conjunto ao qual pertence, até que eu tenha adquirido o automatismo de passar da primeira relação à última tão rapidamente que não deixe quase nenhum papel a memória, me pareça ver o todo simultaneamente por intuição. Com efeito,

> desta maneira, ajudando a memória, corrige-se, também, a lentidão do espírito e estende-se de alguma maneira sua capacidade. (ibidem, p.39-40, tradução nossa)

Os métodos de demonstração por absurdo e demonstração indireta são considerados por Polya instrumentos de descoberta e, desse modo, presentes na atividade heurística. Assim, são incluídos entre os artigos do *Dicionário*:

> Demonstração por absurdo e demonstração indireta. São procedimentos diferentes, porém correlatos.
>
> A demonstração por absurdo mostra a falsidade de uma suposição derivando dela um absurdo flagrante. É um procedimento matemático, mas se assemelha à ironia, que é o procedimento predileto dos satiristas. A ironia adota, com todas as aparências, uma determinada opinião, que é exagerada e repetida até conduzir a um manifesto absurdo.
>
> A demonstração indireta estabelece a verdade de uma afirmação por revelar a falsidade da suposição oposta. Desse modo, ela apresenta certa semelhança com a astúcia do político que procura firmar os méritos de um candidato pela demolição da reputação do seu oponente.
>
> Tanto a demonstração por absurdo quanto a demonstração indireta são eficazes instrumentos da descoberta, que se apresentam naturalmente a todo espírito atento. (Polya, 1994, p.52-3)

Na citação acima, Polya toma o cuidado de diferenciar demonstração indireta e demonstração por absurdo. Ainda que possam parecer processos idênticos, a demonstração por absurdo é assentada em convenções quanto ao uso da linguagem em Matemática, ao passo que a demonstração indireta envolve o *princípio do terceiro excluído*,[3] um axioma fundamental da Lógica.

---

3 O princípio do terceiro excluído afirma que ou *A* é verdadeiro, ou *A* é falso, em que *A* é qualquer proposição passível de análise. Em essência, o axioma exclui qualquer estado intermediário entre a veracidade e a falsidade de *A*.

Assim, suponha que se deseja provar que "se *A*, então *B*". Utilizando a demonstração por absurdo tem-se que provar que é impossível, ao mesmo tempo, termos *A* verdadeiro e *B* falso, ou seja, supondo a veracidade de *A* e a falsidade de *B*, chega-se a uma contradição. Já na demonstração indireta, tem-se de provar que "se *B* for falso, então *A* será falso", isto é, tem-se de supor *B* falso e deduzir que *A* será falso.

No Capítulo 1 foi mencionado que o método de redução ao absurdo, amplamente utilizado pelos matemáticos gregos, resulta do princípio da não contradição, base dos raciocínios do filósofo eleata Zenão, considerado por Aristóteles como o inventor da dialética. Conhecendo-se, *a priori*, a validade de uma proposição, aplica-se a redução ao absurdo, supondo válida a negação da hipótese, obtendo-se uma contradição. Convém salientar que o método de redução ao absurdo é uma forma de demonstração indireta e não de demonstração por absurdo.

Agora, chega-se ao verbete central para este trabalho: heurística. Para definir heurística moderna, Polya baseia-se nos significados que foram atribuídos ao termo *heurística* por autores que se dedicaram ao estudo dos processos de invenção, no transcorrer da história.

> Heurística, heurética ou *ars inveniendi* era o nome de um certo ramo de estudo, não bem delimitado, pertencente à Lógica, à Filosofia ou à Psicologia, muitas vezes delineado mas raramente apresentado com detalhes, hoje praticamente esquecido. O objetivo da heurística é o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Alguns indícios desse estudo podem ser encontrados em trabalho dos comentaristas de Euclides. A este respeito, Pappus tem uma passagem particularmente interessante. As mais famosas tentativas de sistematização da heurística devem-se a Descartes e a Leibniz, ambos grandes matemáticos e filósofos. Bernard Bolzano apresentou notável descrição pormenorizada da heurística. (ibidem, p.86)

> Heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas

> desse processo, que tenham utilidade. Dispõe de várias fontes de informação, nenhuma das quais deve ser desprezada. Um estudo consciencioso da heurística deve levar em conta tanto as suas bases lógicas quanto as psicológicas. Não deve esquecer aquilo que os autores antigos como Pappus, Descartes, Leibniz e Bolzano escreveram sobre o assunto, mas muito menos pode desprezar a experiência imparcial. A experiência na resolução de problemas e a experiência na observação dessa atividade por parte de outros deve constituir a base em que se assenta a Heurística. Neste estudo, não devemos descurar de nenhum tipo de problema, e assim procurar aspectos comuns na maneira de tratar de problemas de toda sorte: devemos considerar os aspectos gerais, independente do assunto específico do problema. O estudo da heurística tem objetivos "práticos": melhor conhecimento das típicas operações mentais que se aplicam à resolução de problemas pode exercer uma certa influência benéfica sobre o ensino, particularmente sobre o ensino da Matemática. (ibidem, p.87)

Vestígios de heurística também são encontrados no trabalho *O método*, de Arquimedes. Antes da descrição de seu método mecânico de demonstração, na carta enviada a Eratóstenes, Arquimedes escreve que considera seu método diferente de uma demonstração, sendo ele uma investigação da demonstração. Também nota-se que uma das condições apontadas para a aplicação de seu método é o conhecimento prévio do que se quer demonstrar.

> Mas vejo-te, como afirmo, que tu és um estudioso sério, que tu dominas de uma maneira notável as questões de filosofia e que tu sabes apreciar com seu valor as questões de matemática que se apresentam, e tenho julgado a propósito descrever e desenvolver neste mesmo livro, as características próprias de um método segundo o qual te será permitido examinar alguns dos que primeiro me foram evidentes pela mecânica, foram demonstrados mais tarde pela geometria, por causa da investigação por este método ser diferente de uma demonstração; a investigação da demonstração preconcebida de um certo conhecimento dos problemas por intermédio desse

> método, com efeito, é mais fácil que sua investigação sem conhecimento. (Arquimedes, 1971, p.167-8, tradução nossa, ver Anexo)

Arquimedes deixa clara sua intenção em discutir o processo heurístico envolvido em seu método mecânico, considerando que tal discussão traria contribuições aos trabalhos de outros geômetras que poderiam aplicar o seu método para a demonstração de novos teoremas.

> Mas acontece-me também que a descoberta dos teoremas publicados agora tem sido gerada de modo semelhante anteriormente; também tenho querido redigir e publicar este método ao mesmo tempo porque, como disse anteriormente, tenho querido parecer seguro por ter proferido palavras vãs e estou persuadido de trazer uma contribuição muito útil à matemática, uma vez que, sou de opinião que alguns pósteros chegarão a encontrar por meio do método exposto outros teoremas que a mim ainda não me hão ocorrido. (ibidem, p.168, tradução nossa, ver Anexo)

Pelas razões apontadas e discutidas, pode-se considerar que *O método* de Arquimedes é um tratado que contém processos de atividade heurística. Fica evidente a preocupação em estabelecer um processo de raciocínio heurístico que pudesse auxiliá-lo na descoberta da solução de uma proposição para que, posteriormente, fosse aplicado o método da exaustão em sua demonstração.

> A heurística trata do comportamento humano em face de problemas. É de presumir que isto venha ocorrendo desde os primórdios da sociedade humana e a quintessência de antigas observações a respeito parece ter sido preservada na sabedoria dos provérbios. (Polya, 1994, p.88)

Uma das componentes do raciocínio heurístico é a indução, cuja definição, adotada por Polya, é aquela apresentada por Aristóteles e utilizada por Descartes na *Regra VII*, citada no Capítulo 5.

> Indução e indução matemática. A indução é o processo da descoberta de leis gerais pela observação de casos particulares. É utilizada em todas as ciências, inclusive na Matemática. A indução matemática é utilizada exclusivamente na Matemática, para demonstrar teoremas de um certo tipo. É de lamentar que estes nomes estejam relacionados, visto que há muito pouca conexão lógica entre os dois processos. Há, no entanto, alguma conexão prática, já que muitas vezes utilizamos ambos conjuntamente. (ibidem, p.91)

O raciocínio indutivo é um caso particular do raciocínio heurístico; dessa forma, a indução assume o mesmo papel tanto na investigação matemática quanto na investigação de outras ciências.

> Mas devemos acrescentar que muitos fatos matemáticos foram primeiro encontrados por indução e demonstrados depois. A Matemática, apresentada com rigor, é uma ciência sistemática, mas a Matemática em desenvolvimento é uma ciência indutiva experimental. (ibidem, p.93)

A indução faz parte da aprendizagem do homem ao longo da vida, isto é, ela está presente na construção cognitiva, constituindo um processo pelo qual se obtêm informações das experiências com o objetivo de chegar a conclusões verdadeiras, passando a ter um acúmulo de conhecimento que permita estabelecer estratégias eficientes para a resolução de problemas.

> A indução termina por adaptar nossa mente aos fatos. Quando comparamos nossas ideias com observações pode haver acordo ou desacordo. Se há acordo sentimos mais confiança em nossas ideias; se há desacordo, as modificamos. Depois de repetidas modificações, nossas ideias costumam adaptar-se aos fatos muito melhor. Nossas primeiras ideias sobre qualquer tema novo estão muito próximas de ser errôneas, ao menos em parte; o processo indutivo nos dá uma oportunidade para corrigi-las, adaptando-as à realidade. (idem, 1973a, p.55)

> A experiência modifica as crenças humanas. Nós aprendemos da experiência, ou, melhor dizendo, deveríamos aprender dela. Fazer o melhor uso possível da experiência é um dos grandes empreendimentos humanos e trabalhar por ela é a vocação dos cientistas.
>
> Um cientista digno desse nome tratará de extrair de uma determinada experiência as conclusões mais corretas e acumular as experiências mais úteis para estabelecer a melhor linha de investigação para uma dada questão. O procedimento do cientista para tratar a experiência pode ser chamado indução. (ibidem, p.3-4)

Na *Regra VII*, Descartes discute também a dedução, mas Polya não a menciona, já que ela está relacionada à demonstração de uma proposição em si e não aos processos heurísticos relacionados a sua resolução.

O próximo tópico discutido é a intuição, ainda que esse não seja um dos verbetes do *Pequeno dicionário de heurística* de Polya. Entretanto, a intuição, presente no processo heurístico, é tratada por Descartes e aparece em alguns trechos da obra de Polya.

> Para ser um bom matemático, ou um bom jogador, ou bom no que quer que seja, devemos ter uma boa intuição. Com o propósito de ter uma boa intuição, parece-me, que você deveria começar sendo, naturalmente, sagaz. Ainda que ser sagaz não é o bastante. Você deveria examinar suas intuições, compará-las com os objetivos, modificá-las se for necessário, e assim adquirir uma extensa (e intensa) experiência das intuições que fracassam e as que chegam a ser certas. Com tal experiência como base você será muito mais capaz de julgar competentemente quais intuições têm a oportunidade de se tornarem corretas e quais não. (ibidem, p.111-2)

Na *Regra III*, Descartes define a intuição ou método intuitivo como uma ação da mente pela qual se obtém um conhecimento imediato. A intuição e o discurso estão constantemente associados no ato do pensamento, já que todo trabalho mental parte de uma intuição para chegar a outra intuição, por intermédio do discurso.

Descartes diferencia dois tipos de intuição: intuição sensível e intuição intelectual. A primeira realiza-se a cada instante. Assim, quando com um só olhar capta-se um objeto, por exemplo, um livro, tem-se um tipo de intuição imediata, isto é, uma comunicação (relação) estritamente direta entre observador e o objeto. Já a segunda envolve um empenho, por parte do observador, para captar segundo um ato imediato da mente aquilo que constitui a natureza dos objetos, ou seja, aquilo que o objeto é. Para isso devem ser utilizados os elementos que constituem o raciocínio heurístico.

> Por intuição, entendo não a confiança flutuante que dão os sentidos ou o julgamento enganador de uma imaginação com más construções, mas o conceito que a inteligência pura e atenta forma com tanta facilidade e distinção que não resta absolutamente nenhuma dúvida sobre aquilo que compreendemos; ou então, o que é a mesma coisa, o conceito que forma a inteligência pura e atenta, sem dúvida possível, conceito que nasce somente da luz da razão e cuja certeza é maior, por causa de sua maior simplicidade, que a da própria dedução, ainda que essa última não possa ser mal feita mesmo pelo homem, como notamos mais acima. Assim, cada um pode ver por intuição intelectual que existe, que pensa, que um triângulo é limitado somente por três linhas, um corpo esférico por uma só superfície, e outros fatos semelhantes que são muito mais numerosos do que a maioria observa, em consequência do desdém que experimentam em voltar a sua inteligência para coisas tão fáceis. (Descartes, 1908, p.14-5, tradução nossa)

Polya (1973a, 1994) define *raciocínio demonstrativo* como o resultado do trabalho do matemático, por exemplo, a prova, e *raciocínio plausível* (*heurístico*) como o processo de descoberta dessa prova, segundo a intuição. Esta intuição intelectual a que Polya se refere tem o mesmo sentido da que consta nas *Regras III* e *VII* de Descartes e que foram discutidas no capítulo anterior.

> Raciocínio heurístico é aquele que não se considera final e rigoroso, mas apenas provisório e plausível, e que tem por objetivo descobrir a solução do problema que se apresenta. Somos muitas vezes levados a usar o raciocínio heurístico. Teremos a absoluta certeza quando chegarmos à solução completa, mas frequentemente, antes de chegarmos à certeza absoluta, teremos de nos satisfazer com uma estimativa mais ou menos plausível. É possível que precisemos do provisório antes de atingirmos o final. Para chegarmos a uma demonstração rigorosa, é necessário o raciocínio heurístico, assim como andaimes são necessários à construção de um edifício. (Polya, 1994, p.132)

Polya (1973a, p.V) enfatiza que apesar de ser considerada como uma ciência demonstrativa, ainda que essa seja somente uma das suas características, a Matemática, em seu desenvolvimento, assemelha-se a qualquer outro conhecimento humano:

> Asseguramos nosso conhecimento matemático por meio do raciocínio demonstrativo, mas apoiamos nossas conjecturas por meio do raciocínio plausível. Uma prova matemática é um raciocínio demonstrativo, mas a evidência indutiva do físico, a evidência circunstancial do advogado, a evidência documental do historiador e a evidência estatística do economista pertencem ao raciocínio plausível.

Para provar um teorema ou para escrever a prova desse teorema com todos os detalhes é necessário, antes de mais nada, intuir o teorema ou a sua prova; ou seja, é preciso combinar observações, seguir analogias e realizar a "prova" mais de uma vez. Ainda que a Matemática seja considerada como uma ciência demonstrativa, Polya enfatiza que, como disciplina escolar, é a única que possibilita a aprendizagem do raciocínio heurístico.

> Há outro ponto concernente a estas duas formas de raciocínio, que merece nossa atenção. Todos sabemos que a Matemática oferece uma excelente oportunidade de aprender o raciocínio demonstrativo,

> mas eu defendo também que não há disciplina nos programas usuais das escolas que ofereça uma oportunidade semelhante de aprender o raciocínio plausível. Dirijo-me a todos os estudantes interessados em Matemática de todos os graus e digo-lhes: "Aprendamos a provar, desde logo, mas aprendamos também a intuir". (ibidem, p.V-VI)

O último verbete do *Dicionário* citado, *termos, antigos e novos*, foi selecionado por fazer referência aos conceitos de análise e síntese, já discutidos no Capítulo 3 deste livro, quando foram abordados os processos heurísticos utilizados pelos geômetras gregos.

> Termos, antigos e novos, que descrevem a atividade de resolver problemas são muitas vezes ambíguos.
>
> 1. Análise foi muito bem defendida por Pappus e é um termo útil, que caracteriza um processo típico de estabelecer um plano, a partir da incógnita (ou da conclusão) e caminhando no sentido dos dados (ou da hipótese). Infelizmente, a palavra adquiriu muitos significados diferentes (como exemplos, análise matemática, química, lógica) e, portanto, lastima-se ter de evitá-la no presente trabalho.
>
> [...]
>
> 8. Síntese foi usada por Pappus com um sentido bem definido, que merecia ser conservado. Lamenta-se, porém, evitá-lo no presente livro, pelas mesmas razões apresentadas para a sua contraparte "análise" (ver 1). (idem, 1994, p.152-3)

Ainda que tenha evitado o uso de tais termos, Polya, em sua obra, faz uma paráfrase do trecho do Livro VII de *A coleção matemática* de Pappus, que define os processos de análise e de síntese, e para exemplificar tais processos, utiliza uma situação não matemática:

> Um homem primitivo deseja atravessar um riacho, mas não pode fazê-lo de maneira habitual porque o nível da água subiu desde a véspera. Por isso, a travessia tornou-se o objeto de um problema: "a travessia do riacho" é o x deste problema primário. O homem pode lembrar-se de já ter atravessado algum outro riacho por uma árvore

> caída. Ele procura ao redor uma árvore caída que lhe sirva, que se torna a sua nova incógnita, o seu y. O homem não encontra nenhuma nessas condições, mas há muitas árvores em pé à margem do riacho; ele deseja que uma delas caia. Ser-lhe-ia possível fazer uma árvore cair atravessada sobre o riacho? Surgem uma grande ideia e uma nova incógnita: por que meios poderia o homem derrubar a árvore sobre o riacho?
>
> Esta sequência de ideias deve chamar-se análise, se aceitamos a terminologia de Pappus. Se o homem primitivo conseguir concluir a sua análise, ele poderá tornar-se o inventor da ponte e do machado. Qual será a síntese? A tradução das ideias em ações. O ato final da síntese será a passagem do homem por sobre a árvore através do riacho. (ibidem, p.106)

Diante das discussões sobre os processos envolvidos na atividade heurística, feitos no livro *How do Solve it*, Polya elabora um plano sobre *Como resolver um problema*. Tal plano é composto por quatro fases: *compreensão do problema*, *estabelecimento de um plano*, *execução do plano* e *retrospecto*.

A primeira fase estabelece que se deve compreender o problema, ou seja, é necessário que os dados do problema e o que se pede estejam evidentes para que seja possível resolvê-lo. Na segunda fase, valendo-se da percepção das relações entre as partes do problema, que poderão dar uma ideia de sua resolução, é estabelecido um plano. Em seguida, na terceira fase, o plano estabelecido é executado e, finalmente, na quarta fase, o procedimento executado é revisto, fazendo-se uma análise e discussão da resolução apresentada.

Para Polya o pensamento matemático não está relacionado apenas com axiomas, definições e demonstrações rigorosas, mas também com analogias, induções, conjecturas, relações, generalizações e outros processos mentais. Nessa perspectiva, são discutidos nos dois livros analisados exemplos de problemas de Matemática que buscam estimular atitudes e hábitos de pensamento desejáveis para o desenvolvimento do raciocínio heurístico e que enfatizam o *saber-fazer*, ou seja, problemas que valorizem, mais do que a obtenção da resposta certa, os processos envolvidos na sua resolução.

# Considerações finais

O objetivo central deste livro foi discutir os vestígios de heurística presentes nas obras de Arquimedes, Pappus e Descartes, buscando, além disso, estabelecer uma relação com as definições apresentadas por Polya para os temas envolvidos no processo de descoberta e invenção da Matemática.

Pode-se considerar que em Arquimedes, Pappus e Descartes encontram-se as origens da heurística e tal fato justifica a escolha das obras estudadas. Quanto a Polya, julga-se que os fundamentos básicos e as operações mentais envolvidas em atividades de resolução de problemas de Matemática estão sistematizas nas obras *How to Solve it*, *Mathematics and Plausible Reasoning* e *Mathematical Discovery* e, desse modo, é inegável a contribuição desse pesquisador para o estudo da heurística.

Arquimedes estabelece um processo de descoberta em que utiliza artifícios mecânicos para chegar à solução de um problema. Por meio das discussões apresentadas por Polya (1973a, 1994) sobre as componentes e o funcionamento do raciocínio plausível foi possível identificar indícios de atividade heurística na obra *O método*.

O Livro VII de *A coleção matemática* é importante, dentre outros aspectos, por nele Pappus descrever e discutir a produção matemática dos gregos Euclides, Apolônio, Eratóstenes e Aristeu, relatando

os procedimentos que esses antigos geômetras utilizavam para realizar suas descobertas e demonstrações das proposições. Algumas obras desses matemáticos só são conhecidas mediante os comentários de Pappus, bem como os assuntos que elas abordavam.

É também nesse livro que Pappus define análise e síntese, que eram métodos para a demonstração de uma proposição. A análise é um método com características heurísticas por envolver processos de raciocínio que antecedem uma demonstração rigorosa, dada pela síntese.

Ainda que não esteja explícito, nota-se que Descartes objetivava a construção de um método que pudesse ser utilizado na resolução de problemas e, nesse método, identifica-se o raciocínio plausível e o raciocínio demonstrativo exposto por Polya, já que na discussão do seu método são tratados elementos como intuição intelectual, analogias, inferências, indução.

Descartes considera seu método como uma exigência ao espírito crítico e o defende como necessário à pesquisa para o conhecimento da verdade, ou seja, para compreender o mundo, é preciso que se tenham ideias claras e exatas que são obtidas com base nas observações que buscam adquirir todos os dados possíveis para que sejam estabelecidas conclusões e hipóteses, que serão verificadas por outros dados que, posteriormente, podem ser obtidos.

Além disso, o método é a ordem que deve ser imposta aos diferentes processos mentais necessários à descoberta ou validação das verdades, isto é, o método busca dar uma disciplina ao processo mental, excluindo do conjunto de informações obtidas as que não têm relações com a pesquisa.

Foi possível perceber que as discussões de Arquimedes, Pappus e Descartes, assim como as de Polya, abordadas nesta pesquisa, estão relacionadas a "como resolver problemas", "como pensar" ou "como fazer", ou seja, pode-se afirmar que essas questões são o eixo central das discussões sobre os processos mentais envolvidos no raciocínio heurístico.

William P. Thurston, importante matemático da atualidade, em cuja produção se pode destacar a formulação da conjectura da

geometrização e a demonstração do teorema de geometrização para as variedades de Haken, discute o avanço do campo da Matemática em um artigo chamado "*On the Proof and Progress in Mathematics*", publicado no *Bulletin of the American Mathematical Society*. Partindo da questão "como os matemáticos demonstram teoremas?", Thurston (1994, p.20) relata que, em virtude da sua experiência e em respostas a pressões sociais, passou a escrever sobre o desenvolvimento da infraestrutura dos resultados que havia publicado e pôde perceber que o "que os matemáticos mais queriam e necessitavam de mim era aprender minhas maneiras de raciocinar, e não aprender minha prova da conjectura da geometrização para as variedades de Haken".

Assim, os procedimentos utilizados na resolução de problemas e os raciocínios que conduzem à descoberta são tão importantes quanto a resposta obtida. Afirma Polya (1973b, p.158):

> O resultado do trabalho criador do Matemático é o raciocínio demonstrativo, uma prova, mas a prova se descobre por raciocínio plausível, isto é, por intuição.
>
> Se isso é assim, e eu o creio, haverá um lugar para a intuição no ensino da Matemática. A educação deve preparar-nos para a invenção, ou, ao menos, para o gosto por ela. Em todo caso, a educação não deve suprimir os germes inventivos no estudante. [...] Meu conselho aos professores de Matemática de todos os graus pode resumir-se nesta exclamação: Ensinemos a intuir!

Entretanto, Polya (1973b) considera que "ensinar a intuir" não é tarefa fácil, visto que não há um método geral de intuição e, consequentemente, um método para ensinar os alunos a intuir. Ainda assim, o autor sugere, para professores que tenham experiência com atividades de resolução de problemas, exercícios que podem ser utilizados em sala de aula e levem os alunos a fazer analogias, inferências, induções, deduções e conjecturas. Assim, se se considera a aprendizagem da Matemática semelhante, de alguma forma, à invenção dessa ciência, a intuição torna-se indispensável à sua aprendizagem.

Nessa perspectiva, a resolução de problemas é vista como uma metodologia de ensino que possibilita ao aluno a manipulação dos objetos matemáticos que podem levá-lo a desenvolver sua capacidade mental, exercitar sua criatividade, refletir sobre seu processo de pensamento, adquirir confiança em si mesmo e divertir-se com sua própria atividade mental. Polya (1994, p.72) aponta a Matemática como disciplina que propicia o desenvolvimento das habilidades descritas; no entanto, chama a atenção para o fato de que os problemas abordados devem ser compatíveis com os conhecimentos dos seus alunos, para despertar a motivação e o prazer da descoberta: "a Matemática é interessante na medida em que ocupa as nossas faculdades de raciocínio e de invenção. Mas nada se aprenderá sobre raciocínio ou invenção se a motivação e a finalidade do passo mais notável permanecer incompreensível".

Além dos autores que foram considerados aqui, convém ressaltar outros importantes matemáticos que se dedicaram ao estudo dos processos heurísticos envolvidos no processo de desenvolvimento da Matemática, como Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) e Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848).

Segundo Polya (ibidem), em diversas passagens da obra de Leibniz, matemático e filósofo alemão, encontram-se discussões sobre o que ele chamava de "arte da invenção", e Bolzano (apud Polya, ibidem, p.35) discute em grande parte de seu tratado de lógica *Wissenschftslehre* a questão da heurística:

> Não me julgo, de maneira alguma, capaz de apresentar aqui qualquer processo de investigação que não tenha sido já há muito tempo percebido por todos os homens de talento e de forma alguma prometo que o leitor encontrará aqui qualquer completa novidade neste assunto. Farei, no entanto, todo o possível para formular, em linguagem clara, as regras e os meios de investigação que são observados por todos os homens capazes, os quais, na maioria das vezes, não têm sequer consciência de as estarem seguindo. Embora não mantenha a ilusão de conseguir plenamente nem mesmo isso, ainda

> tenho a esperança de que o pouco aqui apresentado possa agradar a alguém e encontrar mais tarde alguma aplicação.

Assim, as discussões de aspectos da atividade heurística realizadas por Leibniz e Bolzano podem ser apontadas como objeto de estudo para outras pesquisas.

# Anexo
# *O Método* de Arquimedes, relativo às investigações mecânicas, para Eratóstenes[1]

## De Arquimedes a Eratóstenes[2] para percorrer bem

Eu enviei antes, por escrito, os teoremas que descobri, te encarrego de descobrir estas demonstrações acerca das quais não disse; e os enunciados dos teoremas enviados eram estes; do primeiro: se em um prisma reto, tendo por base um paralelogramo,[3] seja inscrito um cilindro tendo as bases sobre os paralelogramos opostos e os lados nos restantes planos do prisma,[4] e seja traçado segundo o centro do círculo que é a base do cilindro, e por um dos lados do quadrado no plano oposto, o plano tendo isto traçado cortará a partir do cilindro um segmento que está sendo envolvido por dois planos e a superfície do cilindro, um [dos planos] tendo sido traçado e o outro em

---

1 Tradução para o português feita a partir do grego clássico. Os trechos incluídos entre os símbolos <  > não estão legíveis no manuscrito e, dessa forma, no texto crítico, são conjecturas de Heiberg. As notas de rodapé, a partir da nota 2, foram retiradas de Ver Eecke, 1921.

2 Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.)

3 O termo paralelogramo está empregado neste texto duas vezes, com a acepção restrita de quadrado.

4 Isto é, tendo sua superfície lateral tangente aos planos do prisma.

que está a base do cilindro, a superfície [cilíndrica] compreendida entre os citados planos, e o segmento tendo sido cortado a partir do cilindro é a sexta parte do prisma inteiro. E do outro teorema, esta proposição: se em um cubo seja inscrito um cilindro tendo as bases nos paralelogramos opostos, e a superfície sendo tangenciada pelos quatros planos restantes, e, ainda, seja inscrito no mesmo cubo outro cilindro tendo suas bases em outros paralelogramos, e a superfície sendo tangenciada pelos quatros planos restantes, a figura tendo sido envolvida pelas superfícies dos cilindros, e que está em ambos os cilindros, é repartida entre dois do cubo inteiro.[5] Mas acontece que estes teoremas diferem dos descobertos anteriormente; já que naqueles comparávamos as grandezas da figura (os volumes) das figuras de conoides e esferoides[6] e seus segmentos com as grandezas da figura (os volumes) das figuras de cones e cilindros, mas nem sequer essas resultarão igual a uma figura sólida envolvida por planos; e cada uma destas figuras sendo envolvida por dois planos e pelas superfícies cilíndricas resulta igual a uma figura sólida sendo envolvida por planos.

Então, as demonstrações destes teoremas são as que envio redigidas neste livro.

Mas vejo, como afirmo, que tu és um estudioso sério, que tu dominas de uma maneira notável as questões de filosofia e que tu

---

5 Equivale a duas terceiras partes do cubo inteiro.

6 Arquimedes chama conoides os sólidos engendrados pela rotação de uma parábola ou hipérbole ao redor de um eixo, e os esferoides os engendrados pela rotação de uma elipse ao redor de um de seus eixos. Segundo as denominações arquimedianas, é possível ter estas equivalência com respeito aos termos mais convencionais:
conoide retângulo equivale ao paraboloide de revolução;
conoide obtusângulo à hipérbole de revolução;
esferoide ao elipsoide de revolução;
seção de cone acutângulo à elipse;
seção de cone retângulo à parábola;
seção de cone obtusângulo à hipérbole.
Os termos parábola, elipse e hipérbole procedem da linguagem pitagórica, isto é, da aplicação de áreas, e foram introduzidas no estudo da crônicas por Apolônio de Perga (250-170 a.C.)

sabes apreciar com seu valor as questões de matemática que se apresentam, e tenho julgado a propósito descrever e desenvolver neste mesmo livro as características próprias de um método segundo o qual te será permitido examinar alguns dos primeiros que me foram evidentes pela mecânica e que foram demonstrados mais tarde pela geometria, por causa da investigação por este método ser diferente de uma demonstração; a investigação da demonstração preconcebida de um certo conhecimento dos problemas por meio desse método, com efeito, é mais fácil que sua investigação sem conhecimento. < ... Por esta razão, estes teoremas > acerca do cone e da pirâmide, de que Eudoxo[7] foi o primeiro a encontrar a demonstração, que o cone é a terça parte do cilindro, e a pirâmide a terça parte do prisma tendo a mesma base e igual altura, convém atribuir-se uma pequena parte a Demócrito,[8] que primeiro enunciou sem demonstração acerca das ditas figuras. Mas acontece-me também que a descoberta dos teoremas publicados agora tem sido gerada de modo semelhante anteriormente; também tenho querido redigir e publicar este método ao mesmo tempo porque, como disse anteriormente,[9] tenho querido parecer seguro por ter proferido palavras vãs e estou persuadido de trazer uma contribuição muito útil à matemática, uma vez que sou de opinião que alguns pósteros chegarão a encontrar por meio do método exposto outros teoremas que a mim ainda não me hão ocorrido.

Então, primeiramente, escreveremos o resultado que também foi o primeiro a manifestar-se por intermédio do método mecânico, que todo segmento de uma seção do cone reto é quatro terços do triângulo tendo a mesma base e igual altura, e a seguir, cada uma das proposições que foram examinadas da mesma maneira. Mas ao final do livro escreveremos as demonstrações geométricas daqueles teoremas cujas proposições enviamos antes a ti.

---

7 Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.), discípulo de Arquitas e de Platão.

8 Demócrito de Abdera (460-370 a.C.).

9 Ao final da carta-preâmbulo a Dosíteo que acompanham o livro *Sobre a quadratura da parábola*.

Lemas[10]

1. Se de uma grandeza é tirada uma [outra] grandeza, e o mesmo ponto é o centro de gravidade da grandeza inteira e da grandeza tirada, o mesmo ponto é o centro de gravidade da grandeza restante.
2. Se de uma grandeza é tirada uma [outra] grandeza, e que o mesmo ponto não é o centro de gravidade da grandeza inteira e da grandeza tirada, o centro de gravidade da grandeza restante está sobre o prolongamento da reta que une os centros de gravidade da grandeza inteira e da grandeza tirada, situada a uma distância cuja razão com a reta compreendida entre os centros de gravidade indicados é a razão entre o peso da grandeza tirada e o peso da grandeza restante (*Sobre o equilíbrio dos planos*, Livro I, prop. VIII).
3. Se os centros de gravidade de quão grande seja a grandeza[11] jazem sobre uma mesma reta,[12] o centro de gravidade da grandeza estando composta de todas essas grandezas estará também sobre essa reta (ibidem, prop. V, corolário).
4. O centro da gravidade de toda reta é o ponto que divide a reta em duas partes iguais (ibidem, prop. IV).
5. O centro de gravidade de todo triângulo é o ponto em que se cortam as retas conduzidas desde os ângulos do triângulo em direção ao meio dos lados (ibidem, prop. XIV).
6. O centro de gravidade de todo paralelogramo é o ponto em que caem juntos[13] os diâmetros (ibidem, prop. X).
7. O centro de gravidade do círculo é o que também é o centro do círculo.

10 A maioria das proposições que constam neste texto sob o nome de lemas, foram demonstradas por Arquimedes em seu tratado *Sobre o equilíbrio dos planos*. Então, esses lemas são simplesmente lembrados como úteis às demonstrações das proposições do tratado do *Método*.

11 Tantas grandezas quanto se queira.

12 Neste contexto, significando segmento de reta.

13 Tradução literal, em que o significado é "encontram-se diâmetros".

8. O centro de gravidade de todo cilindro é o ponto que divide o eixo em duas partes iguais.
9. O centro de gravidade de todo prisma é o ponto que divide o eixo em duas partes iguais.[14]
10. O centro de gravidade de todo cone está sobre o eixo, tendo sido dividido de modo que o segmento perto do vértice é o triplo do restante.[15]

Mas, também, nos serviremos deste teorema [no (livro) anteriormente escrito *Sobre o Conoide*]: se quão grande seja a grandeza e outras grandezas em igual multidão [números] guardam entre si, tomadas de dois a dois as ordenadas de maneira semelhante, que tenha uma mesma razão; se, além disso, todas ou algumas dessas grandezas primeiras têm as mesmas razões quaisquer com outras grandezas, e as posteriores [segundas] têm as mesmas razões com outras grandezas tomadas nessa ordem, a razão de todas as primeiras grandezas para todas aquelas que dissemos é a mesma que aquela de todas as posteriores [segundas] para todas as outras grandezas que dissemos.[16]

---

14 Arquimedes refere-se ao eixo do prisma à reta que une os centros de gravidade das bases opostas do prisma.

15 O problema relativo à determinação do centro de gravidade do cone não se encontra nas obras conhecidas de Arquimedes. É possível que tenha sido exposto no tratado perdido *Sobre as alavancas* ou na parte perdida do tratado *Sobre o equilíbrio dos planos*.

16 A interpretação em notação moderna é a seguinte: considera-se quatro sucessões de grandezas $A_k$, $B_k$, $C_k$ e $D_k$ (K=1, 2, 3, ... , n-1, n), a proporcionalidade entre os quatro termos correlativos de cada sucessão implica a proporcionalidade correspondente das somas das respectivas sucessões das grandezas: $A_1$, $A_2$, ..., $A_{n-1}$, $A_n$, $B_1$, $B_2$, ..., $B_{n-1}$, $B_n$, tais que: $A_1/A_2 = B_1/B_2$, $A_2/A_3 = B_2/B_3$, ... , $A_{n-1}/A_n = B_{n-1}/B_n$. Sejam as outras partes da sucessão: $A_1$, $A_2$, ..., $A_{n-1}$, $A_n$, e $C_1$, $C_2$, ..., $C_{n-1}$, $C_n$, tais que:
$A_1/C_1 = A_2/C_2$, $A_2/A_3 = C_2/C_3$, ..., $A_{n-1}/C_{n-1} = A_n/C_n = m$,
E as sucessões $B_1$, $B_2$ ..., $B_{n-1}$, $B_n$ e $D_1$, $D_2$ ..., $D_{n-1}$, $D_n$, tais que:
$B_1/D_1 = B_2/D_2$, $B_2/D_2 = B_3/D_3$, ..., $B_{n-1}/D_{n-1} = B_n/D_n = m$,
tem-se: $A_1 + A_2 + ... + A_{n-1} + A_n/C_1 + C_2 + ... + C_{n-1} + C_n = B_1 + B_2 +...+ B_{n-1} + B_n/D_1 + D_2 +D_2 + ... + D_{n-1} + D_n$.

## 1[17]

Seja ABΓ o segmento compreendido entre a reta AΓ e a seção do cone reto ABΓ, e divida em dois a AΓ no (ponto) Δ, e seja traçada a ΔBE, paralela ao diâmetro, e junte as AB e BΓ.

Digo que o segmento ABΓ é o que compreende um terço mais do triângulo ABΓ.

Sejam traçadas a partir dos pontos A e Γ a AZ, paralela a ΔBE, e ΓZ, tocando sobre a seção, e seja prolongada a ΓB em direção a K, e seja estabelecido a ΓZ igual a KΘ. Suponha que ΓT é uma alavanca em que o ponto médio é o K obtido por acaso em uma paralela MΞ a EΔ.

Então, como a ΓBA é uma parábola e tangência a ΓZ, e a ordenada a ΓA, a EB é igual à BΔ; porque isto está demonstrado em *Os Elementos*;[18] então, por isto, e porque as ZA e MΞ são paralelas à EΔ, e a MN é igual à NΞ, e a ZK é igual à KA. Posto que, a MΞ está para ΞO como ΓA está para a AΞ [uma vez que isto é demonstrado no lema *Sobre a quadratura da parábola*, prop. V], e a ΓK está para KN como a ΓA está para a KN.[19] E visto que o ponto N é o centro de gravidade da reta MΞ, dado que a MN é igual à NΞ (Lema IV), então, se colocamos a TH igual à ΞO e o mesmo centro de gravidade Θ, de modo que a TΘ seja igual à ΘH, o TΘH equilibrará a MΞ, e o mesmo estando fixo, por ter sido dividida a ΘN em razão inversa dos pesos TH e MΞ, e que a ΘK está para KN como a MΞ está para a HT (*Sobre o equilíbrio dos planos*, Livro I, prop. VI-VII); de modo que o centro de gravidade de ambos os pesos é o K (Lema III). E de maneira semelhante, quantas paralelas à EΔ que forem traçadas no

17 Área de um segmento parabólico.

18 Arquimedes não se refere ao texto clássico *Elementos de geometria* de Euclides, mas faz uma referência genérica aos *Elementos* sobre crônicas então disponíveis à época, talvez os escritos por Aristeu ou pelo próprio Euclides, resenhado por Pappus (*Col. mat.*, VII) e hoje perdidos. Esta proposição está demonstrada no tratado *Sobre a quadratura da parábola,* prop. II.

19 Em virtude da proposição em nota precedente, tem-se: MΞ/ΞO = ΓA/AΞ, e segundo: ΓA/AΞ = ΓK/KN, em que: MΞ/ΞO = ΓK/KN. Mas por hipóteses: ΓK = ΘK; então: MΞ/ΞO = ΘK/KN.

triângulo ZΑΓ estarão em equilíbrio, o mesmo estando fixo, com os segmentos sendo interceptadas pela seção e tendo sido transportadas em direção a Θ de modo que seja o centro de gravidade de umas e outras o K. E como, o triângulo ΓΖΑ está constituído pelos segmentos de reta traçados no triângulo ΓΖΑ, e os segmentos sendo tomados na seção de modo semelhante à ΞΟ constituem o segmento ΑΒΓ, logo, o triângulo ΖΑΓ, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio em relação ao ponto K ao segmento da seção tendo sido colocado acerca do centro de gravidade Θ de modo que seja o centro de gravidade de ambos o K. Então, divida a ΓΚ ao X de modo que seja a ΓΚ o triplo da ΚΧ; logo, o ponto X será o centro de gravidade do triângulo ΑΖΓ; já que foi demonstrado em *Sobre o equilíbrio* (*Sobre o equilíbrio dos planos*, Livro I, prop. XIV, e lema V). Visto que, como o triângulo, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio em relação ao K, ao segmento ΒΑΓ tendo colocado acerca do centro de gravidade Θ, e o centro de gravidade do triângulo ΑΖΓ é o X, então, ΘΚ está para ΧΚ como o triângulo ΑΖΓ está para o segmento ΑΒΓ sendo jazido acerca do centro Θ. Mas a ΘΚ é o triplo da ΚΧ; logo, o triângulo ΑΖΓ é também o triplo do segmento ΑΒΓ.[20] Mas o triângulo ΖΑΓ é também o quádruplo do triângulo ΑΒΓ, por ser a ΖΚ igual à ΚΑ, e a ΑΔ igual à ΔΓ;[21] portanto, o segmento ΑΒΓ é o que compreende um terço mais do triângulo ΑΒΓ.[22] [Portanto, isto é evidente.]

---

20 Tem-se em virtude das proposições VI e VII do *Sobre o equilíbrio dos planos*, Livro I: ΘΚ/ΤΚ = triângulo ΑΖΓ/segmento ΑΒΓ. Mas tem-se: ΘΚ = ΓΚ, e ΓΚ = 3ΚΧ; então: ΘΚ/ΚΧ = 3, em que o triangulo ΑΖΓ = 3 segmento ΑΒΓ.

21 Tem-se ΖΚ = ΚΑ, ΑΔ = ΔΓ e ΚΒ = ΒΓ, e considerando os triângulos como tendo mesma altura e bases iguais, tem-se: ΑΖΓ = 2ΑΓΚ = 2(ΑΒΓ + ΑΒΚ) = 2(ΑΒΓ + ΑΒΓ) = 4ΑΒΓ.

22 Portanto, segundo as relações das duas precedentes, tem-se: quatro triângulos ΑΒΓ igual a três segmentos ΑΒΓ; ou, assim, como está estabelecido no texto: segmento ΑΒΓ igual a quatro terços do triângulo ΑΒΓ.

## 2[23]

Certamente, isto que foi mencionado não demonstra o que procede, mas...

Que toda esfera é o quádruplo do cone tendo a base igual ao grande círculo da esfera e altura igual a partir do centro para fora[24] da esfera,[25] e o cilindro tendo a base igual ao grande círculo da esfera e altura igual ao diâmetro da esfera é o que contém outro tanto e mais metade da esfera.[26] Assim, examina-se segundo este método:

Seja uma esfera em que o ΑΒΓΔ é o grande círculo, e as ΑΓ e ΒΔ sendo os diâmetros perpendiculares um ao outro, e seja na esfera o círculo acerca do diâmetro ΒΔ perpendicular em direção ao círculo ΑΒΓΔ, e sobre o círculo perpendicular construa o cone tendo como vértice o ponto Α. E sendo prolongada a superfície do cone, corte este com um plano por meio do Γ paralelo à base, então produzirá o círculo perpendicular em direção à ΑΓ, e o diâmetro do mesmo a ΕΖ. E com base neste círculo construa o cilindro tendo o eixo igual à ΑΓ; e sejam as ΕΛ e ΖΗ os lados do cilindro. E prolongue a ΓΑ, e essa permaneça igual à ΑΘ. E suponha o ΓΘ a alavanca e o meio dela o Α. E seja traçada uma paralela a ΜΝ começando por ΒΔ, e esta corte o círculo ΑΒΓΑ segundo os Ξ e Ο, e o diâmetro a ΑΓ segundo o Σ, e a reta ΑΕ segundo o Π, e a ΑΖ segundo o Ρ. E levante a partir da reta ΜΝ o plano perpendicular em direção à ΑΓ; então, este produzirá no cilindro como seção um círculo em que o diâmetro será a ΜΝ, e na esfera ΑΒΓΔ um círculo em que o diâmetro será a ΞΟ, e no cone ΑΕΖ um círculo em que o diâmetro será a ΠΡ.

---

23 Volume da esfera

24 Significando o raio.

25 Ver demonstração geométrica no tratado *Sobre a esfera e o cilindro*, Livro I, prop. XXXIV.

26 Ver demonstração geométrica no tratado *Sobre a esfera e o cilindro*, Livro I, prop. XXXIV, corolário.

E uma vez que o [retângulo] sob ΓΑ e ΑΣ[27] é igual ao [retângulo] sob ΜΣ e Σ∏, porque a ΑΓ igual à ΣΜ, e a ΑΣ igual à ∏Σ (Euc., VI, 4), e o [retângulo] sob ΑΓ e ΑΣ é igual ao [quadrado] valendo-se de ΑΞ (idem, VI, 8), isto é, os [quadrados] a partir dos ΞΣ e ΣΠ (idem, I, 47), então, o [retângulo] sob ΜΣ e ΣΠ é igual aos [quadrados] a partir dos ΞΣ e ΣΠ.[28] E visto que a ΜΣ está para ΣΠ como a ΓΑ está para ΑΣ, e a ΓΑ igual à ΑΘ, então, a ΘΑ está para ΑΣ como a ΜΣ está para ΣΠ, isto é, o [quadrado] tomando-se por base ΜΣ está para o [quadrado] sob ΜΣ e ΣΠ. Mas foi mostrado que o [retângulo] sob ΜΣ e ΣΠ é igual aos [quadrados] a partir dos ΞΣ e ΣΠ; portanto, o [quadrado] a partir do ΜΣ está para os [quadrados] a partir dos ΞΣ e ΣΠ como a ΑΘ está para ΑΣ.[29] Mas o [quadrado] a partir do ΜΝ está para os [quadrados] a partir dos ΞΟ e ΠΡ como o [quadrado] a partir do ΜΣ está para os [quadrados] a partir dos ΞΣ e ΣΠ (idem, V, 15), e o [quadrado] a partir do ΜΝ está para os [quadrados] a partir dos ΞΟ e ΠΡ, assim o círculo, no cilindro, em que o diâmetro é a ΜΝ está para ambos os círculos, no cone, em que o diâmetro é a ΠΡ e na esfera em que o diâmetro é a ΞΟ (idem, XII, 2); logo, o círculo no cilindro está para os círculos na esfera e no cone como a ΘΑ está para ΑΣ.[30] Por conseguinte, já que a ΘΑ está para ΑΣ como o mesmo círculo no cilindro, o mesmo estando fixo, está para ambos

27 Para designar o retângulo de lados, por exemplo, ΑΒ e ΒΓ, ou o quadrado de lado ΑΒ, Arquimedes emprega no primeiro caso a expressão *"tò hypó tõn ΑΒ, ΒΓ"*, isto é, "o [contido] por ΑΒ, ΒΓ", e no segundo caso a expressão *"tò apo tes ΑΒ"*, isto é "o [descrito] sobre ΑΒ". São expressões relativamente usuais; veja por exemplo, Euc. II, 4, e Euc. I, 47, para um e o outro caso.

28 Sendo ΑΓ = ΕΓ = ΣΜ, e por semelhança de triângulos tem-se: ΑΣ = ΠΣ, em que pelo produto: ΓΑ x ΑΣ = ΜΣ x ΣΠ. Por outra parte, no círculo, uma corda é a média proporcional entre o diâmetro que passa por uma de suas extremidades e entre a projeção dessa corda sobre o diâmetro; $ΓΑ \times ΑΣ = ΑΞ^2 = ΞΣ^2 + ΑΣ2 = ΞΣ^2 + ΣΠ^2$, como no texto: $ΜΣ \times ΣΠ = ΞΣ^2 + ΣΠ^2$.

29 Tem-se ΓΕ/ΣΠ = ΓΑ/ΑΓ. Mas ΓΕ = ΜΣ, e ΑΘ = ΓΑ; então: $ΜΣ/ΣΠ = ΜΣ^2/ ΜΣ \times ΣΠ = ΘΑ/ΑΣ$, substituindo o valor encontrado na nota precedente, encontra-se a relação como no texto: $ΜΣ^2/ΞΣ2 + ΣΠ^2 = ΑΘ/ΑΣ$.

30 Observando que os círculos estão entre si como os quadrados dos diâmetros, a relação da nota precedente resulta assim: $ΜΣ^2/ΞΣ^2 + ΣΠ^2 = ΜΝ^2/ΞΟ^2 + ΠΡ^2$ = círculo ΜΝ/ círculo ΞΟ + círculo ΠΡ = ΑΘ/ΑΣ.

os círculos em que os diâmetros as ΞΟ e ΠΡ, tendo sido deslocado e tendo sido colocado desse modo em direção a Θ, de modo ser o Θ o mesmo centro de gravidade de cada um deles, estarão em equilíbrio em relação ao ponto A. Mas, de modo semelhante, é demonstrado também que se no paralelogramo ΔZ é traçada outra paralela a EZ, e com base na reta traçada é levantado um plano perpendicular em direção à ΑΓ, porque o círculo sendo produzido no cilindro, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio acerca do ponto A em ambos os círculos, sendo produzido na esfera e sendo produzido no cone, tendo sido deslocado e tendo sido colocado desse modo acerca do Θ sobre a alavanca, de modo que seja o Θ o centro de gravidade de cada um deles. Portanto, tendo sido preenchido o cilindro, a esfera e o cone tendo sido tomados pelos círculos, o cilindro, estando fixo, estará em equilíbrio acerca do ponto A, ambos a esfera e o cone, tendo sido deslocados e tendo sido colocados acerca do Θ sobre a alavanca, de modo que seja o Θ o centro de gravidade de cada um deles. Portanto, visto que os sólidos mencionados estão em equilíbrio acerca do ponto A, o cilindro estando fixo acerca do centro de gravidade K (Lema VIII) e sendo deslocada a esfera e o cone, como foi citado, acerca do centro de gravidade Θ, desse modo o cilindro estará para a esfera e o cone como a ΘA está para AK (*Sobre o equilíbrio dos planos*, Livro I, prop. VI e VII). Mas a ΘA é o dobro da AK; logo, o cilindro é o dobro da esfera e do cone (Euc., XII, 10), e é o triplo do próprio cone.[31] Portanto, três cones são iguais a dois desses cones e duas esferas. Sejam retirados os dois cones comuns; então, um cone que tenha segundo o eixo o triângulo AEZ é igual às duas esferas mencionadas.[32] Mas o cone que tenha por meio do eixo o triângulo AEZ é igual a oito cones, que está mediante o eixo do triângulo ABΔ (idem, XII, 12), por ser a EZ o dobro da BΔ. Portanto, os oitos cones

31 Sabe-se que ΘA = ΑΓ = 2AK, e da relação estabelecida pelas proposições em nota anterior, tem-se: cilindro/ esfera + cone = ΘA/AK = 2AK/AK = 2, ou como estabelecido no texto: cilindro = 2 (esfera + cone).

32 Segundo as duas notas precedentes, tem-se: cilindro = 2 esferas + 2 cones, e cilindro = 3 cones, ou como no texto: 3 cones = 2 cones + 2 esferas, isto é , cone = 2 esferas.

mencionados são iguais a duas esferas. Portanto, a esfera em que o grande círculo é ΑΒΓΔ é o quádruplo do cone em que o vértice é o ponto A, e a base o círculo acerca do diâmetro ΒΔ perpendicular em direção à ΑΓ.[33]

Agora, sejam traçadas no paralelogramo ΛΖ, por intermédio dos pontos B e Δ, as ΦΒΧ e ΨΔΩ paralelas à ΑΓ; e suponha um cilindro cujas bases sejam os círculos acerca do diâmetro ΦΨ e ΧΩ, e o eixo seja a ΑΓ. Portanto, como o cilindro, em que o paralelogramo segundo o eixo é ΦΩ é o dobro do cilindro em que o paralelogramo por meio do eixo é ΦΔ (idem, XII, 14), e esse mesmo é o triplo do cone em que o triângulo mediante o eixo é o ΑΒΔ, como em *Os Elementos* (Euc., XII, 10), logo, o cilindro, em que o paralelogramo por intermédio do eixo é ΦΩ, é o sêxtuplo do cone em que o triângulo segundo o eixo é ΑΒΔ. Mas foi demonstrado que [sendo] a esfera, em que o grande círculo é o ΑΒΓΔ, é quádruplo do mesmo cone; portanto, o cilindro contém outro tanto e mais metade da esfera;[34] o que era necessário ser demonstrado.[35]

Porque, disso demonstrado, toda esfera é o quádruplo do cone tendo por base o grande círculo e a altura igual do centro para fora da esfera; era gerada a ideia que a superfície de toda esfera é o quádruplo do grande círculo da esfera (*Sobre a esfera e o cilindro*, Livro I, prop. XXXIII); porque, com efeito, a suposição que todo círculo é igual a um triângulo tendo por base a circunferência do círculo e uma altura igual do centro para fora do círculo (*Sobre a medida do círculo*, prop. I),

---

33 De acordo com a preposição 12, Livro XII de Euclides, e sabendo que ΕΖ = 2ΒΔ, tem-se: cone ΑΒΔ/cone ΑΕΖ = $B\Delta^3/EZ^3 = B\Delta^3/8B\Delta^3 = 1/8$, ou como no texto: cone ΑΕΖ = 8 cones ΑΒΔ. Mas da nota precedente, tem-se: cone ΑΕΖ = 2 esferas ΑΒΓΔ; então, como no texto: 8 cones ΑΒΔ = 2 esferas ΑΒΓΔ e a esfera ΑΒΓΔ = 4 cones ΑΒΔ.

34 O cilindro ΦΩ = 2 cilindros ΦΔ. Mas o cilindro ΦΔ = 3 cones ΒΑΔ; então: o cilindro ΦΩ = 6 cones ΒΑΔ. Mas, em nota precedente, tem-se: a esfera ΑΒΓΔ = 4 cones ΒΑΔ, ou como no texto: cilindro ΦΩ = 3/2 da esfera ΑΒΓΔ.

35 Esta razão entre a esfera e o cilindro que a circunscreve, demonstrada como corolário da proposição XXXIV do Livro I de *Sobre a esfera e o cilindro*, é o que Arquimedes considerou digno de figurar sobre a lápide de seu túmulo, segundo refere Plutarco dos testemunhos de Cícero.

e porque toda esfera é igual a um cone tendo por base a superfície da esfera e altura igual do centro para fora da esfera.[36]

## 3[37]

Mas examina-se por este método também que o cilindro tendo uma base igual ao grande círculo de um esferoide[38] e a altura igual ao eixo do esferoide é o que contém outro tanto e mais metade do esferoide; e examinado isto resulta evidente que todo esferoide tendo sido cortado por um plano segundo o centro e perpendicular em direção ao eixo, a metade do esferoide é o dobro do cone tendo a mesma base e o mesmo eixo que o segmento.

Com efeito, seja um esferoide cortado por um plano mediante o eixo; e seja engendrada, na superfície do mesmo, ΑΒΓΔ a seção do cone de ângulo agudo (acutângulo), e sejam as ΑΓ e ΒΔ os diâmetros, e Κ o centro; e seja, no esferoide, o círculo acerca do diâmetro ΒΔ perpendicular em direção à ΑΓ; e suponha um cone tendo por base o mencionado círculo e por vértice o ponto Α; e prolongando a superfície, corte o cone por um plano segundo o Γ paralelo à base; então, a seção será um círculo perpendicular em direção à ΑΓ e diâmetro ΕΖ. Mas seja também um cilindro tendo por base o mesmo círculo em que o diâmetro a ΕΖ e eixo a reta ΑΓ; e se prolongando a ΑΓ, essa permaneça igual a ΑΘ; e suponha ΘΓ a alavanca e o ponto médio o Α; e no paralelogramo ΛΖ trace a ΜΝ paralela a ΕΖ e por ΜΝ levante um plano perpendicular em direção à ΑΓ; então, esse produzirá como seção no cilindro um círculo em que o diâmetro é a ΜΝ, e como seção no esferoide um círculo em que o diâmetro é a ΞΟ, e como seção no cone um círculo em que o diâmetro é a ΠΡ.

---

36 O volume da esfera de raio R é igual à $4/3\pi R^3$, e esse é igual a $1/3R \times 4R^2$, e esse é igual ao volume do cone de altura R e base $4\pi R^2$. Mas $4\pi R^2$ é igual à área da esfera; então: o volume da esfera é igual ao volume do cone de altura R e base igual à área da esfera.

37 O volume do elipsoide de revolução.

38 Isto é, um elipsoide de revolução.

E visto que a ΓΑ está para a ΑΣ como a ΕΑ está para ΑΠ (Euc., VI, 4), isto é, a ΜΣ está para a ΣΠ (idem, VI, 4; V, 18), e a ΓΑ está para a ΑΘ, então a ΘΑ está para a ΑΣ como a ΜΣ está para ΣΠ. Mas a ΜΣ está para ΣΠ como o [quadrado] a partir do ΜΣ está para o [retângulo] sob ΜΣ e ΣΠ;[39] e o [retângulo] sob ΜΣ e ΣΠ é igual aos [quadrados] a partir dos ΠΣ e ΣΞ. Posto que, com efeito, o [retângulo] sob ΑΣ e ΣΓ está para o [quadrado] a partir do ΣΞ[40] como o [retângulo] sob ΑΚ e ΚΤ, isto é, o [quadrado] a partir do ΑΚ está para o [quadrado] do ΚΒ [então, ambas as razões são iguais à razão entre o lado transverso e o lado reto][41] e o quadrado do ΑΚ está para o quadrado do ΚΒ como o quadrado do ΑΣ está para o quadrado do ΣΠ (idem, VI, 4), então, inversamente o quadrado do ΠΣ está para o quadrado do ΣΞ como o quadrado do ΑΣ está para o retângulo ΑΣ e ΣΓ (idem, V, 16). Mas o quadrado do ΑΣ está para o retângulo dos ΑΣ e ΣΓ como o quadrado do ΣΠ está para o retângulo dos ΣΠ e ΠΜ (idem, V, 15; VI, 4); portanto, o retângulo dos ΜΠ e ΠΣ é igual ao quadrado do ΞΣ (idem, V, 9). Seja acrescentado ao comum quadrado ΠΣ de uma e de outra o quadrado sobre ΠΣ; então, o retângulo sob os ΜΣ e ΣΠ será igual aos quadrados dos ΠΣ e ΣΞ (idem, II, 3). Logo, a ΘΑ está para ΑΣ[42] como o quadrado do ΜΣ está para os

---

39 Por semelhança de triângulo, tem-se: $EA/A\Pi = E\Gamma/\Sigma\Pi = M\Sigma/\Sigma\Pi = \Gamma A/A\Sigma = A\Theta/A$, em que: $M\Sigma^2/M\Sigma \times \Sigma\Pi = \Theta A/A\Sigma$.

40 A constante da relação  pode ser deduzida do fato de que a ordenada no eixo principal da elipse está na coordenada correspondente do círculo descrito neste eixo principal, na relação constante do eixo menor ao eixo principal.

41 Arquimedes conhecia seguramente as propriedades fundamentais da elipse que logo demonstraria Apolônio de Perga nas *Cônicas*, Livro I, propriedade 21. Em particular supõe-se que o estudo das cônicas havia alcançado em meados do século III resultados desse teor. Na seção do cone acutângulo, a razão entre o quadrado das ordenadas e o retângulo das abscissas sobre o diâmetro é igual à média entre o dobro do segmento até eixo e o diâmetro. Sem problema, a interpolação evidencia-se no uso dos termos *plagía* (lado ou diâmetro transverso) e *orthía* (lado reto ou parâmetro das ordenadas), tomados justamente de Apolônio.

42 A igualdade da nota precedente pode ser escrita assim: $\Pi\Sigma^2 + \Pi\Sigma \times \Pi M = \Pi\Sigma^2 + \Sigma\Xi^2$, ou: $\Pi\Sigma[\Pi\Sigma + \Pi M] = \Pi\Sigma \times M\Sigma = \Pi\Sigma^2 + \Sigma\Xi2$, substituindo na relação $M\Sigma^2/M\Sigma \times \Sigma\Pi = \Theta A/A\Sigma$ em nota anterior, como no texto: $M\Sigma^2/\Pi\Sigma^2 + \Sigma\Xi^2 = \Theta A/A\Sigma$.

quadrados dos ΠΣ e ΣΞ. Mas o quadrado do ΜΣ está para os quadrados dos ΣΞ e ΣΠ como o círculo, no cilindro, em que o diâmetro é a ΜΝ está para ambos os círculos em que os diâmetros são ΞΟ e ΠΡ (idem, XII, 2); por conseguinte, o círculo em que o diâmetro é a ΜΝ, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio acerca do ponto Α a ambos os círculos em que os diâmetros são as ΞΟ e ΠΡ, tendo sido deslocados e tendo sido colocados sobre o Θ da alavanca, de modo que seja o Θ o mesmo centro de gravidade de cada um deles. Mas o Θ é o centro de gravidade de ambos os círculos que foram deslocados em que os diâmetros são as ΞΟ e ΠΡ; por conseguinte, a ΘΑ está para ΑΣ[43] como o círculo em que o diâmetro é a ΜΝ está para ambos os círculos em que os diâmetros são as ΞΟ e ΠΡ. Mas demonstrar--se-á de modo semelhante que se é traçada no paralelogramo ΛΖ outra reta paralela à ΕΖ, e com base na reta que foi traçada levanta-se um plano perpendicular em direção à ΑΓ, porque o círculo produzido no cilindro, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio acerca do ponto Α com ambos os círculos, sendo produzido no esferoide e sendo produzido no cone, tendo sido deslocado desse modo sobre o Θ da alavanca de modo que seja o Θ o mesmo centro de gravidade de cada um deles. Por conseguinte, o cilindro, e o esferoide, e o cone tendo sido enchidos pelos círculos que são tomados assim, o cilindro, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio acerca do ponto Α com o esferoide e com o cone tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre a alavanca em direção ao Θ de modo que seja o Θ o centro de gravidade de cada um deles. E o centro de gravidade do cilindro é o Κ (Lema VIII), e, como foi citado, o centro de gravidade do esferoide e do cone é o Θ; então, a ΘΑ está para ΑΚ como o cilindro está para ambos, o esferoide e o cone. Mas a ΑΘ é o dobro da ΑΚ; logo, também o cilindro é o dobro de ambos, o esferoide e o cone; por conseguinte, um cilindro é igual a dois cones e dois esferoides. Mas um cilindro é igual a três desses mesmos cones (Euc., XII, 10);

---

43 Tem-se: círculo ΜΝ/círculo ΞΟ + círculo ΠΡΞ = $ΜΝ^2/ΞΟ^2 + ΠΡ^2$ = $ΜΣ^2/ΣΞ^2$ + ΠΣ2, segundo a nota, tem-se, círculo ΜΝ/círculo ΞΟ + círculo ΠΡ = ΘΑ/ΑΣ.

então, três cones são iguais a dois cones e dois esferoides. Sejam tirados dois cones comuns; logo, o cone restante, em que o triângulo por intermédio do eixo é o AEZ, é igual a dois esferoides. Mas um desses mesmos cones é igual a oito cones em que o triângulo segundo o eixo é o ABΔ; logo, os oito cones mencionados são iguais a dois esferoides; e logo, quatro cones são iguais a um esferoide; logo, o esferoide é quádruplo do cone em que o vértice é o ponto A e a base é o círculo acerca do diâmetro BΔ, perpendicular em direção à AΓ, e a metade do esferoide é o dobro do citado cone.[44]

E sejam traçadas mediante os pontos B e Δ, no paralelogramo ΛZ, as paralelas ΦX e ΨΩ à AΓ, e suponha um cilindro em que as bases são os círculos acerca dos diâmetros ΦΨ e XΩ, e o eixo a reta AΓ. Portanto, com efeito, o cilindro em que ΦΩ é o paralelogramo por meio do eixo é o dobro do cilindro em que ΦΔ é o paralelogramo segundo o eixo, por ser as bases iguais e o eixo do primeiro ser o dobro do eixo do segundo, e o mesmo cilindro em que ΦΔ (idem, XII, 13) é o paralelogramo mediante o eixo é o triplo do cone em que o vértice é o ponto A e em que a base é o círculo acerca do diâmetro BΔ perpendicular em direção à AΓ (idem, XII, 10); logo, o cilindro em que ΦΩ é o paralelogramo por meio do eixo é o sêxtuplo do mencionado cone. Mas foi demonstrado que o esferoide é o quádruplo de mesmo cone; logo, o cilindro é o que contém outro tanto e mais metade do esferoide.[45] οι.

---

44 As relações que precedem se sucedem do segundo modo:
cilindro ΛZ/elipsoide + cone EAZ = ΘA/AK = 2AK/AK = 2, em que o cilindro ΛZ = 2 cones EAZ + 2 elipsoides. Mas o cilindro ΛZ = 3 cones EAZ; então, como no texto: 3 cones EAZ = 2 cones EAZ + elipsoides, ou, o cone EAZ = 2 elipsoides. Mas sabendo que EZ = 2BΔ, tem-se: cone BAΔ/cone EAZ = $BΔ^3/EZ^3 = BΔ^3/8BΔ^3 = 1/8$; então, o cone EAZ = 2 elipsoides. Mas sabendo que EZ = 2BΔ, tem-se: cone BAΔ/cone EAZ = $BΔ^3/EZ^3 = BΔ^3/8BΔ^3 = 1/8$; o cone EAZ = 8 cones BAΔ, em conformidade com o texto: 8 cones BAΔ = 2 elipsoides, ou o elipsoide = 4 cones BAΔ, e 1/2 elipsoide = 2 cones BAΔ.

45 O cilindro ΦΩ = 2 cilindro ΦΔ. Mas o cilindro ΦΔ = 3 cones BAΔ; então, o cilindro ΦΩ = 6 cones BAΔ. Mas em nota precedente, tem-se que o elipsoide = 4 cones BAΔ, em que o cilindro ΦΩ/elipsoide = 6/4 = 3/2; logo, o cilindro ΦΩ = 3/2 esferoides.

## 4[46]

E que todo segmento de um conoide retângulo[47] sendo cortado por um plano perpendicular em direção ao eixo é o que contém outro tanto e mais metade do cone que tendo mesma base e mesmo eixo que o segmento (*Sobre conoides e os esferoides,* prop. XXI); assim, examina-se por intermédio deste procedimento:

Com efeito, seja um conoide retângulo cortado por intermédio do eixo por um plano que produza na superfície do conoide a seção do cone reto ΑΒΓ; e também seja cortado por um outro plano perpendicular em direção ao eixo, e seja a ΒΓ a seção comum (desses planos); e seja a ΔΑ o eixo do segmento, e prolongue a ΔΑ em direção a Θ e essa permaneça igual a ΑΘ, e suponha a ΔΘ a alavanca em que o ponto médio é o Α. E que a base do segmento seja o círculo acerca do diâmetro ΒΓ sendo perpendicular em direção à ΑΔ; e suponha o cone tendo como base o círculo em que o diâmetro é a ΒΓ e vértice o ponto Α; e seja também um cilindro tendo por base o círculo em que o diâmetro é a ΒΓ e o eixo é a ΑΔ. E trace no paralelogramo a ΜΝ sendo paralela à ΒΓ, e levante a partir da ΜΝ o plano perpendicular em direção à ΑΔ; então, esse produzirá como seção no cilindro um círculo em que o diâmetro é a ΜΝ, e como seção no segmento do conoide retângulo um círculo em que o diâmetro é a ΞΟ.

Visto que ΒΑΓ é uma seção de cone reto, e seu diâmetro é a ΑΔ, e as ΞΣ e ΒΔ são traçadas em ordem[48] de modo que a ΔΑ está para ΑΣ como [o quadrado] a partir da ΒΔ está para [o quadrado] ΞΣ; mas a ΔΑ é igual à ΑΘ; portanto, a ΘΑ está para ΑΣ como [o quadrado] a partir da ΜΣ está para [o quadrado] a partir da ΣΞ. Mas [o quadrado] a partir da ΜΣ está para [o quadrado] a partir da ΣΞ como o círculo no cilindro, em que o diâmetro é a ΜΝ, está para o círculo no segmento do conoide retângulo, em que o diâmetro é a ΞΟ (Euc., XII, 2); por conseguinte, a ΘΑ está para ΑΣ como o círculo, em que

46 Volume de um segmento de paraboloide.

47 Paraboloide.

48 Isto é, traçadas em ordem paralela à tangente do vértice da parábola.

o diâmetro é a MN, está para o círculo em que o diâmetro é a ΞO (*Sobre a Quadratura da Parábola,* prop. III).[49] Portanto, o círculo em que o diâmetro é a MN no cilindro, o mesmo estando fixo, está em equilíbrio acerca do ponto A ao círculo em que o diâmetro é a ΞO, tendo sido deslocado e tendo sido colocado em relação a Θ sobre a alavanca de modo que seja o Θ o mesmo centro de gravidade. O centro de gravidade do círculo, em que o diâmetro é a MN, é o Σ (Lema VII), e o centro de gravidade do círculo, em que o diâmetro é a ΞO, tendo sido transportado é o Θ; e a razão que tem a ΘA para AΣ é de maneira oposta a razão do círculo, em que o diâmetro é a MN, para o círculo em que o diâmetro é a ΞO.[50] E mostrará de modo semelhante que, se qualquer outra [reta] é traçada paralelamente a BΓ no paralelogramo EΓ, e com base na [reta] que foi traçada é levantado um plano perpendicular em direção à AΘ, porque o círculo sendo gerado no cilindro, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio perto do ponto A ao círculo sendo gerado no segmento do conoide retângulo tendo sido deslocado sobre a alavanca para o Θ de modo que seja o Θ o mesmo centro de gravidade. Portanto, tendo sido enchido o cilindro e o segmento do conoide retângulo,[51] o cilindro, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio acerca do ponto A ao segmento do conoide retângulo tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre a alavanca para o Θ de modo que seja o Θ o mesmo centro de gravidade. Mas visto que as ditas grandezas estão em equilíbrio acerca do ponto A, e o centro de gravidade do cilindro é o ponto K, sendo dividida em dois a AΔ em relação ao ponto K (Lema VIII), e o Θ é o centro de gravidade do segmento tendo sido deslocado, a razão que terá a ΘA para a AK é de maneira oposta a razão do cilindro para o segmento. Mas a ΘA é o dobro da AK; portanto, o cilindro é o dobro

---

49 Tem-se: $B\Delta^2/\Xi\Sigma^2 = A\Delta/A\Sigma$. Mas $\Theta A = \Delta A$, e $M\Sigma = B\Delta$; então: $M\Sigma^2/\Xi\Sigma^2 = \Theta A/A\Sigma$. Mas o círculo MN/círculo $\Xi O = MN^2/\Xi o^2 = M\Sigma^2/\Xi\Sigma^2$; então, o círculo MN/círculo $\Xi = \Theta A/A\Sigma$.

50 Isto é, que os braços da alavanca são inversamente proporcionais aos círculos a que conduzem.

51 Com círculos obtidos da maneira que acabamos de ver. Corta este segmento segundo o eixo.

do segmento. Mas o mesmo cilindro é o triplo do cone que tem por base o círculo em que o diâmetro é a ΒΓ, e vértice o ponto A (Euc., XII, 10). Portanto, é evidente que o segmento contém outro tanto e mais metade do mesmo cone.[52]

## 5[53]

E visto que no segmento do conoide retângulo[54] cortado por um plano perpendicular em direção ao eixo, o centro de gravidade está sobre a reta que é o eixo do segmento, desse modo tendo sido dividida a dita reta de modo que seja essa parte perto do vértice o dobro do segmento restante. Assim, examina-se desta maneira:

Seja um segmento do conoide retângulo cortado por um plano perpendicular em direção ao eixo e corte esse segmento com um outro plano segundo o eixo, e produza na superfície a seção do cone reto ΑΒΓ (*Sobre os conoides e os esferoides,* prop. XI); e seja ΒΓ a interseção do plano no segmento e do plano cortando o segmento comum, e seja a reta ΑΔ o eixo do segmento e o diâmetro da seção ΑΒΓ; e <prolongando a ΔΑ e colocando essa igual à ΑΘ;e> suponha o ΔΘ a alavanca, e o ponto médio dessa o A; e seja também um cone inscrito no segmento, e as ΒΑ e ΑΓ os lados[55] do mesmo; e seja traçado na seção do cone a ΞΟ, sendo paralela à ΒΓ, e essa corte a seção do cone reto segundo os pontos Ξ e Ο, e os lados do cone segundo os pontos Π e Ρ.

Portando, na seção do cone reto são traçadas as ΞΣ e ΒΔ perpendiculares em direção ao diâmetro, de modo que a ΔΑ está para ΑΣ como [o quadrado] a partir da ΒΔ está para [o quadrado] a partir da

52 Tem-se: cilindro/segmento = ΘΑ/ΑΚ. Mas ΘΑ = 2ΑΚ; então, o cilindro = 2 segmentos. Mas o cilindro = 3 cones ΒΑΓ; então, 2 segmentos = 3 cones ΒΑΓ; logo, o segmento = 3/2 cone ΒΑΓ.

53 Centro de gravidade de um segmento de paraboloide.

54 Segmento do paraboloide.

55 Isto é, os traços do cone inscrito no segmento do paraboloide sobre o plano que corta o segmento segundo o eixo.

ΞΣ [*Sobre a quadratura da parábola,* prop. III]. Mas a ΔA está para AΣ como a BΔ está para ΠΣ (Euc., VI, 4), e a BΔ está para ΠΣ como [o quadrado] a partir da BΔ está para o [retângulo] sob os BΔ e ΠΣ; e logo, [o quadrado] a partir da BΔ será [o quadrado] a partir da ΞΣ como [o quadrado] a partir da BΔ está para [o retângulo] sob os BΔ e ΠΣ. Portanto, [o quadrado] a partir da ΞΣ é igual ao [retângulo] sob os BΔ e ΠΣ (idem, V, 9); Logo, as BΔ, ΣΞ e ΣΠ são proporcionais (idem, VI, 17), e por causa disto, a BΔ está para ΠΣ como [o quadrado] a partir da ΞΣ está para (o quadrado) a partir da ΣΠ (idem, V, 9). Mas a BΔ está para ΠΣ como a ΔA está para AΣ, isto é, a ΘA está para AΣ; portanto, a ΘA está para AΣ como (o quadrado) a partir da ΞΣ está para (o quadrado) a partir da ΣΠ. Então, levante a partir da ΞO um plano perpendicular em direção à AΔ; então, isto produzirá no segmento do conoide retângulo (*Sobre os conoides e esferoides,* prop. XI ) um círculo em que o diâmetro é a ΞO, e no cone um círculo em que o diâmetro é a ΠP. E visto que a ΘA está para AΣ como [o quadrado] a partir da ΞΣ está para [o quadrado] a partir da ΣΠ, e [o quadrado] a partir da ΞΣ está para [o quadrado] a partir da ΣΠ como o círculo em que o diâmetro é a ΞO está para o círculo em que o diâmetro é a ΠP (idem, XII, 2); portanto, a ΘA está para AΣ como o círculo em que o diâmetro é a ΞO está para o círculo em que o diâmetro é a ΠP. Portanto, o círculo em que o diâmetro é a ΞO, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio acerca do ponto A ao círculo em que o diâmetro é a ΠP, tendo sido deslocado sobre o Θ da alavanca de modo que seja o centro de gravidade o Θ. Portanto, visto que o centro de gravidade do círculo, em que o diâmetro é a ΞO, o mesmo estando fixo, é o Σ (Lema VII), e o centro de gravidade do círculo, em que o diâmetro é a ΠP, tendo sido deslocado como citado, é o Θ, e que a ΘA está para AΣ na razão oposta da razão entre o círculo em que o diâmetro é a ΞO e o círculo em que o diâmetro é a ΠP; portanto, estarão em equilíbrio perto do ponto A. E de maneira semelhante, mostrará que se for traçada na seção do cone reto outra paralela à BΓ, e a partir da reta traçada for levantado um plano perpendicular em direção à AΔ, porque o círculo gerado no segmento do conoide retângulo, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio

acerca do ponto A ao círculo gerado no cone, tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Θ da alavanca de modo que seja o mesmo centro de gravidade o Θ. Portanto, tendo sido preenchido sob círculos o segmento e o cone, todos os círculos tendo sido colocados no segmento, esses estando fixos, estarão em equilíbrio acerca do ponto A para todos os círculos do cone tendo sido deslocados e tendo sido colocados sobre o ponto Θ da alavanca de modo seja o mesmo centro de gravidade o Θ; portanto, o segmento do conoide retângulo, o mesmo estando fixo, estando em equilíbrio acerca do ponto A ao cone tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Θ da alavanca de modo que seja o mesmo centro de gravidade o Θ. Uma vez que, então, o centro de gravidade de ambas as grandezas, sendo consideradas como uma só, é o A (Lema III); porém, o mesmo centro de gravidade do cone deslocado é o Θ; logo, o centro de gravidade da grandeza restante está sobre a reta AΘ, sendo prolongada em direção à A e tendo sido afastada essa de tal tamanho a partir da AK, de modo que tenha a AΘ para AK a mesma razão que tem o segmento para o cone (Lema II). Mas o segmento é o que contém outro tanto e mais metade do cone (proposição IV); logo, a AΘ é também a que contém outro tanto e mais metade da AK, e o centro de gravidade do (segmento) do conoide retângulo é o K, assim, dividindo AΔ de modo que a parte do segmento próxima ao vértice é o dobro da parte restante.[56]

## 6[57]

O centro de gravidade de todo hemisfério está sobre a reta que é o mesmo eixo, tendo sido dividido de modo que essa parte perto da superfície do hemisfério tenha para a parte restante a mesma razão que tem cinco para três.

56 De acordo com o texto, tem-se: $A\Theta/AK$ = segmento/cone. Porém, em virtude da proposição IV, tem-se: segmento = 3/2 cone; então: $A\Theta/AK = 3/2$, resultando das considerações estabelecidas no texto, isto é, $A\Theta = A\Delta = AK + K\Delta = 3/2\ AK$. Logo, como no texto, tem-se: $AK = 2K\Delta$

57 Centro de gravidade de um hemisfério.

Seja uma esfera cortada pelo plano mediante o centro e seja gerado na superfície cortada o círculo ΑΒΓΔ; e sejam ΑΓ e ΒΔ os diâmetros dos círculos perpendiculares um em direção ao outro; e valendo-se de ΒΔ levante o plano perpendicular em direção a ΑΓ; e seja o cone tendo por base o círculo acerca do diâmetro ΒΔ e vértice o ponto Α, e sejam ΒΑ e ΑΔ os lados do cone; prolongue a ΓΑ e faça a ΑΘ igual à ΓΑ, e supondo a alavanca a reta ΘΓ, o ponto médio o mesmo Α, trace no semicírculo ΒΑΔ a ΞΟ sendo paralela a ΒΔ; e essa corte a circunferência do semicírculo sobre os Ξ e Ο, e os lados do cone sobre os pontos Π e Ρ, e a ΑΓ sobre o Ε; e tomando-se por base ΞΟ levante o plano perpendicular em direção a ΑΕ; então, isto produzirá a seção no hemisfério um círculo em que o diâmetro é a ΞΟ, e a seção no cone um círculo em que o diâmetro é a ΠΡ.

E como a ΑΓ está para ΑΕ como [o quadrado] a partir da ΞΑ está para [o quadrado] a partir da ΑΕ (Euc., III, 31; V, def. 9; 8 corolário), (o quadrado) a partir da ΞΑ é igual aos [quadrados] a partir das ΑΕ e ΕΞ (idem, I, 47), e ΑΕ igual a ΕΠ (idem, VI, 4), então a ΑΓ está para ΑΕ como [os quadrados] a partir das ΞΕ e ΕΠ estão para [o quadrado] a partir da ΕΠ.[58] Mas [os quadrados] a partir das ΞΕ e ΕΠ estão para [o quadrado] a partir da ΕΠ como o círculo acerca do diâmetro ΞΟ e o círculo acerca do diâmetro ΠΡ estão para o círculo acerca do diâmetro ΠΡ, e a ΓΑ é igual à ΑΘ; portanto, a ΘΑ está para ΑΕ como o círculo acerca do diâmetro ΞΟ e o círculo acerca do diâmetro ΠΡ estão para o círculo acerca do diâmetro ΠΡ.[59] Portanto, ambos os círculos que são de diâmetros ΞΟ e ΠΡ, estando fixos, estarão em equilíbrio acerca do ponto Α ao círculo em que o diâmetro é ΠΡ, tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Θ de modo que seja o mesmo centro de gravidade o Θ. Portanto, como o centro de gravidade de ambos os

58 Tem-se: $\Xi A^2 = AE \times A\Gamma$, em que $\Xi A^2/AE^2 = A\Gamma/AE$. Mas $\Xi A^2 = E\Xi^2 + AE^2$, então: $E\Xi^2 + AE^2/ AE^2 = A\Gamma/AE$. Mas o triângulo ΑΕΠ sendo semelhante ao triângulo ΑΗΒ e tendo os lados do ângulo reto iguais, tem-se: $AE = E\Pi$; ou conforme o texto: $\Xi E^2 + E\Pi^2/ E\Pi^2 = A\Gamma/AE$.

59 Tendo em vista, por hipótese $\Theta A = A\Gamma$, a relação da nota precedente e como no texto, tem-se: círculo ΞΟ + círculo ΠΡ/círculo ΠΡ = $\pi\Xi E^2 + \pi E\Pi^2/\pi E\Pi^2 = \Theta A/AE$.

círculos são os diâmetros ΞO e ΠP, o mesmo estando fixo, é o E (Lema 7), e o (centro de gravidade) do círculo em que o diâmetro é ΠP, tendo sido deslocado, é o Θ, então a EA está para AΘ como o círculo em que o diâmetro é ΠP está para os círculos em que os diâmetros são ΞO e ΠP. E de modo semelhante, também se na seção do cone reto é traçada qualquer outra paralela a BHΔ e a partir da [reta] que foi traçada, é levantado um plano perpendicular em direção a AΓ, ambos os círculos gerados, no hemisfério e no cone, o mesmo estando fixo, estarão em equilíbrio acerca do ponto A ao círculo gerado no cone, tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Θ da alavanca. Portanto, tendo sido preenchido por círculos o hemisfério e o cone, todos os círculos no hemisfério e no cone, esses estando fixos, estarão em equilíbrio acerca do ponto A e todos os círculos no cone tendo sido deslocados e tendo sido colocados sobre o Θ da alavanca de modo que tenham o mesmo centro de gravidade Θ. Por conseguinte, o hemisfério e o cone, esses estando fixos, estarão em equilíbrio acerca do ponto A ao cone tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Θ da alavanca de modo que tenham o mesmo centro de gravidade Θ.[60]

<Seja então um cilindro MN suspenso pelo ponto Θ, e igual ao cone ABΔ; corte o cilindro por um plano perpendicular ao eixo de modo que o cilindro (parcial) M esteja em equilíbrio com o cone acerca do ponto A; a parte restante (sc. o cilindro) N, estará em equilíbrio com o hemisfério. Tome-se sobre AH um ponto Φ tal que AΦ seja o triplo de ΦH; o ponto Φ será o centro de gravidade do cone (Lema 8). Mas tome também um ponto X tal que AH seja a AX como oito está para cinco. Assim, visto que o cilindro M está em equilíbrio acerca do ponto A ao cone ABΔ, o cilindro M está para o cone ABΔ como ΦA está para ΘA, isto é, como três está para oito. Mas o cone ABΔ é igual ao cilindro MN; portanto, o cilindro MN está para o cilindro M como

60 O que se segue deste ponto em diante, nesta proposição, é substancialmente uma reconstrução estabelecida por Heiberg na edição crítica das *Obras completas de Arquimedes*, tomo II, p.470, o qual procurou ater-se à figura da proposição IV deste texto, e toma como pauta de referência o desenvolvimento da proposição IX, também deste texto.

oito está para três e que, por conseguinte, o cilindro N está para o cilindro MN como cinco está para oito, ou que o cone ABΔ está para o cilindro N como oito está para cinco, isto é, como AH está para AX.> E como a esfera é o quádruplo do cone tendo por base o círculo acerca do diâmetro BΔ e eixo AH (proposição II), <então, o hemisfério está o cone ABΔ como dois está para um, isto é, como AΘ está para AX. Além disso, semelhantemente (Euc., V, 22), o cilindro N, em que o centro de gravidade é Θ, estará equilibrando o hemisfério acerca do ponto A; logo, o centro de gravidade do hemisfério é o ponto X, que divide o eixo de modo que a parte situada do lado da superfície do hemisfério tenha com a parte restante a razão do cinco para três.>[61]

## 7[62]

Também por este método é mostrado que todo segmento de esfera para o cone tendo mesma base e o mesmo eixo que o segmento tem a mesma razão, que tem do centro para fora da esfera e a altura do segmento restante para a altura do segmento restante (*Sobre a esfera e o cilindro*, II, 2).[63]

<Seja, portanto, uma esfera, ABΓΔ o grande círculo, AΓ e TY dois diâmetros perpendiculares; corta-se a esfera por um plano perpendicular à AΓ, cortando um segmento tendo por base o círculo acerca do diâmetro BΔ; seja H o ponto de interseção entre BΔ e AΓ; construa-se sobre o círculo (sc. como base) um cone de vértice A. Construa-se, além disso, sobre o círculo acerca do diâmetro TY um cone tendo o mesmo vértice e prolongue sua superfície; corte-se por meio do plano traçado por BΔ que produza no cone como seção o círculo acerca do diâmetro EZ; e esse descreve no mesmo plano acerca de H como centro e do centro para fora igual a AΓ o círculo acerca do diâmetro

61 Texto reconstruído por Heiberg.
62 Volume de um segmento esférico.
63 Na reconstrução seguinte das passagens ilegíveis dessa proposição, Heiberg parte do modelo sugerido pela construção inicial da proposição II.

KΔ, e construa-se sobre o círculo um cilindro tendo por eixo AH e admitindo como paralelogramo passando pelo eixo o paralelogramo ΦΛ. Prolongue-se AΓ por ambos os lados de modo que no prolongamento resulte, por um lado, ΓΩ igual do centro para fora da esfera e, por outro lado, AΘ igual a AΓ; e seja pensado ΓΘ a alavanca e o ponto médio A.

Portanto, no paralelogramo ΦΛ trace a reta MN, paralela à BΔ> e valendo-se de MN levante o plano perpendicular em direção à AΓ; então, esse [plano] produzirá como seção no cilindro o círculo em que o diâmetro é a MN, e no segmento da esfera como seção o círculo em que o diâmetro é o ΞO, e no cone em que a base é o círculo acerca do diâmetro EZ e vértice o ponto A, o círculo em que o diâmetro é a ΠP. Então, de modo semelhante (proposição II), outra vez (refere-se à proposição II), será mostrado que o círculo em que o diâmetro é a MN, o mesmo estando fixo, está em equilíbrio acerca do ponto A a ambos os círculos em que os diâmetros são as ΞO e ΠP, tendo sido deslocado sobre Θ da alavanca de modo que seja o mesmo centro de gravidade de ambos o Θ; mas, de modo semelhante, para todos [os círculos]. Portanto, tendo sido preenchido por círculos o cilindro e o cone e o segmento da esfera e o cilindro, o mesmo estando fixo, estará em equilíbrio ambos ao cone e ao segmento da esfera, transportados e jazidos sobre o Θ da alavanca. E corte a AH sobre os pontos Φ e X de modo que seja a AX igual a XH e a HΦ a terça parte da AH; então, o X será o centro de gravidade do cilindro por ser o ponto médio do eixo AH (Lema 8). Por conseguinte, como as grandezas anunciadas estão em equilíbrio acerca do ponto A, o está a razão do cilindro para a soma do cone, em que o diâmetro da base é a EZ, e o segmento da esfera BHΔ como a ΘA está para AX. E como a HA é o triplo da HΦ, o [retângulo] sob ΓH e HΦ é a terça parte do [retângulo] sob AH e HΓ é igual [o quadrado] a partir da HB (Euc., VI, 8 corolário; V, 17); então, o [retângulo] sob ΓH e HΦ também será a terça parte [do quadrado] a partir da BH.[64] <Por outra parte,

64 Tem-se: cilindro ΦΛ/cone EAZ + segmento esférico BAΔ = ΘA/AX. Mas HΦ = 1/3AH; então, como estabelecido no texto: ΓH x HΦ = 1/3AH x ΓH e $HB^2$ = AH x ΓH; logo, ΓH x HΦ = $1/3HB^2$.

[o quadrado] a partir da AH é igual ao [retângulo] sob AH e HΦ, isto é, o triplo do [retângulo] sob AX e AΦ, porque AH é o dobro de AX, e AΦ o dobro de ΦH (ou posto que, AH está para AX como AΦ está para ΦH, isto é, como dois está para um.). Além disso, já que ΘA é igual a KH e AH igual a HE, a razão do [quadrado] a partir da ΘA ao terço do [quadrado] a partir da AH será igual à razão do cilindro, tendo por base o círculo acerca do diâmetro KΛ, ao cone AEZ. Além disso, a razão do [quadrado] a partir da ΘA a um terço do [quadrado] a partir da AH é igual a razão do [quadrado] a partir da ΘA ao [retângulo] sob AX e AΦ; então, a razão do [quadrado] a partir da ΦA ao [retângulo] sob AX e AΦ é igual a razão do cilindro ao cone.> Mas também foi mostrado que ΘA está para AX como o cilindro em que a base é o círculo KΛ está para o segmento da esfera ABΛ e o cone; além disso, ΘA <é igual a AΓ, isto é, igual a AΦ e ΦΓ; então, a razão entre [o quadrado] a partir da ΘA e os [retângulos] sob AΦ, AX e ΦΓ, AX é igual a razão do cilindro ao segmento ABΔ e do cone AEZ. A razão do cilindro ao segmento da esfera será, então, igual a razão do [quadrado] a partir da ΘA ao [retângulo] sob ΦΓ e AX. Mas [o quadrado] a partir da ΘA está para um terço do [quadrado] a partir da BH como o cilindro está para o cone ABΔ, e o [quadrado] a partir da ΘA está para um terço do [quadrado] a partir da BH como o [quadrado] a partir da ΘA está para o [retângulo] sob ΓH e HΦ; o segmento ABΔ está para o cone ABΔ como o [retângulo] sob ΦΓ e AX está para o [retângulo] sob ΓH e HΦ. E como AH é igual ao dobro da AX, e para AΦ e ΦH, e ao triplo da ΦH; também que ΦΓ é igual a ΦH e HΓ, assim como um terço da AH e HΓ, então o [retângulo] sob ΦΓ e AX será igual a estes dois retângulos, o que tem por lados um terço de AH e três meios de ΦH e o que tem por lados HΓ e três meios de ΦH; é igual ao retângulo que tem por lados ΦH e um meio de AΓ e HΓ, assim como igual ao retângulo de lados ΦH e HΩ. Em consequência, HΩ está para a HΓ como o segmento ABΔ está para o cone ABΔ>.[65]

---

65 Texto reconstruído por Heiberg. Em notação moderna, esta proposição VII tem por objetivo demonstrar a seguinte relação: segmento esférico BAΔ/cone BAΔ

## 8[66]

E de modo semelhante, segundo o mesmo método, examina-se também que a razão de todo o segmento de esferoide determinado por um plano perpendicular ao eixo e o cone que tem mesma base e mesmo eixo que o segmento é igual a razão entre metade do eixo [semieixo] do esferoide e do eixo do segmento estando situado em frente[67] (do segmento oposto de uma parte) com o eixo do segmento estando situado em frente (do segmento oposto da outra parte).[68]

---

= 1/2ΑΓ + ΗΓ/ΗΓ. Até esse ponto, em que há uma falha no texto, tem-se a seguinte relação: cilindro ΦΛ/cone ΕΑΖ + segmento esférico ΒΑΔ = ΘΑ/ΑΧ = ΑΓ/1/2ΑΗ = 2ΑΓ/ΑΗ (1).

Mas tem-se: cilindro de base ΕΖ/ cilindro ΦΛ = $ΗΖ^2/ΗΛ^2$, resultando na seguinte relação: cilindro de base ΕΖ = 3 cones ΕΑΖ; então, cone ΕΑΖ/cilindro ΦΛ/ = $ΗΖ^2/ΗΛ^2$. Porém, por semelhança de triângulos, em que os lados têm ângulos retos iguais, resulta ΗΖ = ΑΗ, e da figura dessa proposição tem-se: ΗΛ = ΑΓ; então: Cone ΕΑΖ/cilindro ΦΛ = $ΑΗ^2/3ΑΓ^2$(2).

Isolando em (1) a relação: cilindro ΦΓ = 2ΑΓ x cone ΕΑΖ + segmento esférico/ ΑΗ e substituindo em (2), e efetuando as devidas operações, tem-se: ΕΑΖ/ cone ΕΑΖ + segmento esférico ΒΑΔ = 2ΑΗ/3ΑΓ, em que cone ΕΑΖ/cone ΕΑΖ + cilindro esférico ΒΑΔ - cone ΕΑΖ = cone ΕΑΖ/segmento esférico ΒΑΔ = 2ΑΗ/3ΑΓ - 2ΑΗ (3).

Por outra parte, tem-se: cone ΒΑΔ/cone ΕΑΖ = $ΗΒ^2/ΗΖ^2$. Mas, segundo o texto, $ΗΒ^2$ = ΑΗ x ΗΓ e, da figura, ΗΖ = ΑΗ; então:

Cone ΒΑΔ/cone ΕΑΖ = ΗΓ/ΑΗ (4). Isolando em (3) a relação: cone ΕΑΖ = ΑΗ x cone ΒΑΔ/ΗΓe substituindo em (4), e efetuando as devidas operações, tem-se:

segmento esférico ΒΑΔ/cone ΒΑΔ = 3ΑΓ - 2ΑΗ/2ΗΓ; e conforme a figura, tem-se: ΑΗ = ΑΓ - ΗΓ, cuja substituição na relação anterior, resulta em: segmento esférico ΒΑΔ/cone ΒΑΔ = ΑΓ + 2ΗΓ/2ΗΓ = 1/2ΑΓ + ΗΓ/ΗΓ, isto é, a relação que se queria demonstrar.

66 Volume de um segmento de elipsoide.

67 Isto é, do segmento situado de uma maneira oposta.

68 Esta proposição, que generaliza a preposição precedente, não está acompanhada da demonstração mecânica, a qual será análoga àquela da preposição 7, e cuja demonstração geométrica está no livro *Sobre os conoides e esferoides*, prop. XXIX e XXXI.

## 9[69]

O centro de gravidade de todo segmento de esfera está sobre a reta que é eixo do segmento, sendo dividida de modo que a parte [do lado] do vértice do segmento tenha com a parte restante a mesma razão que tem o eixo do segmento e o quádruplo do eixo contido no segmento estando em frente (do segmento oposto de uma parte) para a soma do eixo do segmento e o dobro do eixo contido no segmento estando em frente [no segmento oposto].[70]

<Seja uma esfera e dela corte-se um segmento por um plano perpendicular, que a interseção da esfera com o outro plano, passando por seu centro, seja a seção da superfície o círculo ΑΒΓΔ;> e seja ΒΔ a seção do plano que corta o segmento, e seja a reta ΓΑ o diâmetro perpendicular em direção à ΒΔ e corte em relação ao ponto Η; de modo que o eixo do segmento em que o vértice é o ponto Α será ΑΗ, e o eixo [do segmento] estando em frente [oposto] a ΗΓ. E corte a ΑΗ em relação a Χ de modo que esteja ΑΧ para ΚΗ como ΑΗ e o quádruplo da ΗΓ está para ΑΗ e o dobro da ΗΓ. Digo que o centro de gravidade do segmento em que o vértice é o ponto Α é o Χ [...][71]

[...] E fique prolongada a ΑΓ, e essa jazida igual a ΑΘ e do centro para fora da esfera igual a ΓΞ; e suponha a ΓΘ a alavanca com o mesmo ponto médio Α, e também fique descrito, no plano cortado ao segmento, o círculo com centro em Η, e distância igual a ΑΗ, e tomando-se por base este círculo fique descrito o cone tendo vértice no ponto Α; e sejam as ΛΕ e ΑΖ os lados do cone. E trace a ΚΛ, paralela à ΕΖ, e ajunte a circunferência do segmento sobre os Κ e Γ, e os lados do cone ΑΕΖ sobre os Ρ e Ο, e a ΑΓ sobre Π. Então, uma vez que a ΑΓ está para ΑΠ como [o quadrado] a partir da ΗΑ está para

69 Centro de gravidade de um segmento esférico.

70 O enunciado dessa preposição está danificado no texto do palimpsesto, mas foi reconstruído na edição crítica estabelecida por Heiberg (tomo II, p.474), por analogia com o enunciado da proposição X, relativa ao caso geral do elipsoide de revolução.

71 Tem sido impossível até o presente completar essa lacuna.

[o quadrado] ΑΠ (Euc., III, 31;V, def. 9; 8 corolário), e [o quadrado] a partir da ΚΑ (idem, I, 47) é igual [aos quadrados] a partir das ΑΠ e ΠΚ, e [o quadrado] a partir da ΑΠ (idem, VI, 4) é igual [ao quadrado] a partir da ΠΟ; e uma vez que [o quadrado] a partir da ΑΗ é igual [ao quadrado] a partir da ΕΗ, então ΓΑ está para ΑΗ como [os quadrados] a partir das ΚΠ e ΠΟ estão para [o quadrado] a partir da ΟΠ. Mas [os quadrados] a partir das ΚΠ e ΠΟ estão para [o quadrado] ΠΟ como o círculo do diâmetro ΚΛ e o círculo do diâmetro ΟΡ está para o círculo do diâmetro ΟΡ, e a ΓΑ é igual a ΑΘ; logo, a ΑΘ está para ΑΠ como o círculo do diâmetro ΚΛ e o círculo do diâmetro ΟΡ estão para o círculo do ΟΡ.[72] Portanto, os círculos dos diâmetros ΚΛ e ΟΡ estão para o círculo do diâmetro ΟΡ como a ΑΘ está para ΠΑ, transporte o círculo do diâmetro ΟΡ e o coloque sobre o Θ da alavanca de modo que tenha o mesmo centro de gravidade Θ; logo, a ΘΑ está para ΑΠ como o círculo do diâmetro ΚΛ e o círculo do diâmetro ΟΡ, o mesmo estando fixo, estão para o círculo do diâmetro ΟΡ, tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Θ da alavanca de modo que tenha o mesmo centro de gravidade Θ; portanto, os círculos no segmento ΒΑΔ e o cone ΑΕΖ estarão em equilíbrio acerca do Α no cone ΑΕΖ. E também, de modo semelhante, todos os círculos no segmento ΒΑΔ e no cone ΑΕΖ, o mesmo estando fixo, estarão em equilíbrio acerca do ponto Α a todos os círculos no cone ΑΕΖ, tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Θ da alavanca de modo que tenha o mesmo centro de gravidade Θ; de modo que, também, o segmento da esfera ΑΒΔ e o cone ΑΕΖ, o mesmo estando fixo, estarão em equilíbrio acerca do ponto Α ao cone ΑΕΖ tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o ponto Θ da alavanca de modo que tenha o mesmo centro de gravidade Θ. E seja ΜΝ igual ao cone tendo por

72 No semicírculo ΑΚΓ tem-se: $ΚΑ^2 = ΑΠ \times ΑΓ$, conforme o texto: $ΚΑ^2/ΑΠ^2 = ΑΓ/ΑΠ$ (1), e segundo a figura $ΚΑ^2 = ΑΠ^2 + ΠΚ^2$, e que a construção ΗΖ = ΗΕ = ΑΗ, fornece: ΑΠ = ΠΟ, substituindo na relação (1), tem-se: $ΠΟ^2 + ΠΚ^2/ΠΟ^2 = ΑΓ/ΑΠ$. Mas tem-se:
círculo de diâmetro Κ + círculo de diâmetro ΟΡ/círculo de diâmetro ΟΡ = $ΠΟ^2 + ΠΚ^2/ΠΟ^2$; então, tendo que ΘΑ = ΑΓ, conforme o texto: círculo de diâmetro ΚΛ + círculo de diâmetro ΟΡ/círculo de diâmetro ΟΡ = ΘΑ/ΑΠ.

base o círculo acerca do diâmetro EZ e vértice o ponto A, e corte a AH sob o Φ de modo que seja a AH o quádruplo da ΦH; portanto, o ponto Φ é o centro de gravidade do cone EAZ, porque isto foi escrito antes (Lema 10 e sua respectiva nota). E corte, ainda, o cilindro MN pelo plano perpendicular de modo que o cilindro M esteja em equilíbrio com o cone EAZ. Visto que o cone EAZ e o segmento ABΔ, o mesmo estando fixo, que está em equilíbrio ao cone EAZ, tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Θ da alavanca de modo que tenha o mesmo centro de gravidade Θ; e o cilindro MN é igual ao cone EAZ, e cada um dos cilindros M e N é jazido sobre o Θ, e o cilindro MN que está em equilíbrio com cada um dos dois,[73] e o N ao segmento da esfera sobre o ponto A ao segmento da esfera. E como, o segmento da esfera BAΔ está para o cone em que a base é o círculo acerca do diâmetro BΔ e o vértice é o ponto A como a ΞH está para HΓ, uma vez que isto foi escrito antes.[74] Mas o cone BAΔ está para o cone EAZ como o círculo acerca do diâmetro BΔ está para o círculo acerca do diâmetro EZ (Euc., XII, 11), e o círculo está para o círculo como [o quadrado] a partir da BH está para [o quadrado] a partir da HE (idem, XII, 2); e [o quadrado] a partir da BH (idem, III, 31; VI, 8 corolário) é igual o [retângulo] sob ΓH e HA, e [o quadrado] a partir da HE igual [ao quadrado] a partir da HA e o [retângulo] sob ΓH e HA está para o [quadrado] a partir da HA como a ΓH está para HA; portanto, o cone BAΔ está para o cone EAZ como a ΓH está para HA.[75] Mas foi demonstrado também que o cone BAΔ está para o segmento BAΔ como a ΓH está para HΞ; por igualdade (idem, V, 22), o segmento BAΔ está para o cone EAZ como a ΞH está para HA.[76] E uma vez que a AX e está para XH como a HA e o quádruplo da HΓ está para a AH

73 Isto é, ao cone e ao cilindro.

74 No texto tem-se que o raio da esfera é ΓΞ, e segundo a preposição 7, tem-se ΓΞ + HΓ/HΓ = ΞH/HΓ = segmento esférico BAΔ /cone BAΔ.

75 Tem-se: $BH^2/HE^2$= círculo BΔ/círculo EZ = cone BAΔ/cone EAZ, e observando que ΓH x HA = $BH^2$, que HA = HE, conforme o texto: ΓH x $HA/HA^2$= ΓH/HA = cone BAΔ/cone EAZ.

76 Da combinação das relações das duas notas precedentes, conforme o texto, tem-se a seguinte relação: ΞH/HA = segmento esférico BAΔ/cone EAZ.

e o dobro da HΓ, então, em sentido contrário (idem, V, 7 corolário), HX será a XA, assim o dobro da ΓH e a HA estão para o quádruplo da ΓH e a HA. Por composição (idem, V, 18), a HA está para AX como o sêxtuplo da ΓH e o dobro da HA estão para HA e o quádruplo da HΓ.[77] E a HΞ é a quarta parte do sêxtuplo da HΓ e o dobro da HA, e a ΓΦ é a quarta parte do quádruplo da HΓ e da HA;[78] visto que isto é evidente; portanto, a HA está para AX como a ΞH está para ΓΦ (idem, V, 15), e que a ΞH está para HA como a ΓΦ está para XA. Mas foi demonstrado também que ΞH está para a HA como o segmento em que o vértice é o ponto A e a base o círculo acerca do diâmetro BΔ está para o cone em que o vértice é o ponto A, e a base o círculo acerca do diâmetro EZ; logo, o segmento BAΔ está para o cone EAZ como a ΓΦ está para XA.[79] E como o cilindro M está em equilíbrio sobre o A ao cone EAZ, e o centro de gravidade do cilindro é o Θ, e do cone o Φ, logo, o cone EAZ estará para o cilindro M como a ΘA está para AΦ, isto é, a ΓA está para AΦ. E o cone EAZ é igual ao cilindro MN; portanto, por decomposição (idem, V, 17), o cilindro MN é igual ao cone EAZ; portanto, o cone EAZ está para o cilindro N[80] como a ΓA está para ΓΦ, isto é, a ΘA está para ΓΦ. Mas foi demonstrado também

77 A proposição sendo suposta resolvida e o ponto X encontrado, o enunciado, estabelece: HA + 4H/HA + 2HΓ = AX/XH, relação que o texto retoma sob a forma: 2HΓ + HA/4HΓ + HA = XH/AX, por composição, tem-se: 2HΓ + HA + 4HΓ + HA/4HΓ + HA = XH + AX/AX, ou, como assegura o texto: 6HΓ + 2HA/HA + 4HΓ = HA/AX.

78 Tem-se: ΓΞ = 1/2AΓ, conforme texto: ΞH = HΓ + ΓΞ = HΓ + 1/2AΓ = HΓ + 1/2 (HΓ + HA) = 3/2 H Γ + 1/2 HA = 1/4 (6HΓ + 2HA). Por outra parte, HΦ = 1/4HA, em que: ΓΦ = HΓ + HΦ = HΓ + 1/4HA = 1/4 (4HΓ + HA).

79 Comparando as relações da tradução literal, em que o significado é "encontram-se diâmetros", com *Sobre o equilíbrio dos planos,* Livro *I,* prop. X, tem-se: ΞH/ΓΦ = HA/AX, ou, conforme o texto: ΓΦ/AX = ΞH/HA, comparando com a relação do mesmo Livro, prop. V, corolário, tem-se: ΓΦ/AX = segmento esférico BAΔ/cone EAZ (1).

80 Tem-se: ΘA/AΦ = ΓA/AΦ = cone EAZ/cilindro M. Mas se tomando cilindro M + N = cone EAZ; então: ΓA/AΦ = cilindro M + N/cilindro M, aplicando a propriedade das diferenças de proporções, tem-se: ΓA/ΓA - AΦ = cilindro M + N/cilindro M + N – cilindro M, dessa relação obtém-se: ΓA/ΓΘ = cilindro M + N/cilindro N, como o cilindro M + N = cone EAZ e ΓA = ΘA, e conforme o texto: ΘA/ΓΦ = cone EAZ/cilindro N (2).

que o segmento BAΔ está para o cone EAZ como a ΓΦ está para AX; por identidade (idem, V, 22), o segmento ABΔ estará para o cilindro N[81] como a ΘA está para AX. Também foi demonstrado que se o segmento BAΔ está em equilíbrio sobre o A ao cilindro N, o centro de gravidade do cilindro N é o Θ; portanto, o ponto X é também o centro de gravidade do segmento BAΔ.[82]

## 10[83]

E de modo semelhante examina-se também que o centro de gravidade de todo segmento de esferoide sobre a reta que é eixo do segmento, sendo dividida de modo que essa parte em direção ao vértice do segmento para a (parte) restante tenha a mesma razão que o eixo dos segmentos e o quádruplo do eixo do segmento estando situado em frente (do segmento oposto) tem para o eixo do segmento e o dobro do eixo sendo colocado no segmento estando situado em frente (no segmento oposto).

## 11[84]

E também se examina mediante o (mesmo) modo que a razão de todo segmento do conoide de ângulo débil (ângulo obtuso)[85] para o cone tendo a mesma base e mesmo eixo que o segmento tem [igual]

---

81 Combinando as relações (1) e (2) das notas 79 e 80, isto é, isolando em (1) o ΓΦ e substituindo-o em (2), tem-se, conforme o texto, a seguinte relação: ΘA/AX = segmento esférico BAΔ/cilindro N.

82 O ponto X sendo o centro de gravidade do segmento esférico, segundo o enunciado da proposição, a relação que determina a situação desse ponto é verdadeira. Arquimedes somente estabelece nessa proposição uma verificação mecânica de uma relação que ele tinha provavelmente assegurado por um via direta, mas essa não se encontra exposta em suas obras.

83 Centro de gravidade de um segmento de elipsoide.

84 Volume e centro de gravidade de um segmento de hiperboloide.

85 Hiperboloide de revolução.

razão, que tem ambos, em que o eixo do segmento e o triplo da [reta] ajuntada[86] ao eixo para ambos o eixo do segmento do conoide e o dobro da [reta] ajuntada (*Sobre o conoides e os esferoides,* prop. XXV ) ao eixo, e o centro de gravidade do conoide de ângulo débil (ângulo obtuso)[87] está sobre o eixo, tendo sido cortado de modo que a parte perto do vértice do segmento para a parte restante tenha a (mesma) razão, que tenha por isso o triplo do eixo e o óctuplo da [reta] sendo acrescentada para o eixo do mesmo conoide e o quádruplo dessa [reta] acrescentada para o mesmo [eixo]. E de outra maneira muitos outros teoremas que possam ser demonstrados por esse método, renuncio citar aqui, porque os teoremas indicados bastam para ilustrar o emprego do método.[88]

## 12[89]

Se dentro do prisma reto, tendo as bases quadradas, é inscrito um cilindro tendo as bases situadas nos quadrados opostos e a superfície sendo tocada por quatro planos restantes [paralelogramos], e que seja traçado no plano por meio do centro do círculo que é base do cilindro e por um lado do quadrado oposto, então a figura tendo sido

86 Isto é, a parte do eixo do segmento do conoide de ângulo obtuso compreendido entre seu vértice e o vértice de seu cone assintótico, ou o semieixo transverso do segmento do conoide geratriz.

87 Isto é, sobre o eixo do conoide de ângulo obtuso.

88 O estado do texto impede estabelecer com segurança esse parágrafo. Mas sem nenhum problema, não altera o seu sentido a variante possível (proposta por Heiberg na edição crítica, p. 485, nota 4): "deixando a parte esses casos, só [...] os que havíamos anunciado desde o princípio". Certamente, as proposições que seguem são as que constituem o objeto expresso dessa comunicação a Eratóstenes. Os dois teoremas prometidos se referem, um ao volume do sólido que se obtém ao cortar um cilindro circular reto com um plano que passa por um diâmetro da base e tangente à base oposta e, o outro, ao volume da dupla abóboda cilíndrica. O *Manuscrito C* só conserva o tratamento mecânico e geométrico do primeiro.

89 Volume de um segmento de cilindro.

cortada pelo plano traçado[90] é a sexta parte do prisma inteiro, por esse método isso é examinado. E tendo mostrado o mesmo, retrocederemos por intermédio da demonstração geométrica.[91]

Suponha um prisma reto, que tenha as bases quadradas, e um cilindro inscrito no prisma, como havia mencionado; e o prisma tendo sido cortado por um plano segundo o eixo e perpendicular em direção ao plano que corta o segmento do cilindro, seja o paralelogramo AB a seção do prisma que contém o cilindro, e seja a reta ΒΓ a seção comum do plano que corta o segmento a partir do cilindro e do plano sendo gerado mediante o eixo perpendicular em direção ao plano que foi cortado com base no segmento do cilindro; e seja a reta ΓΔ o eixo do prisma e do cilindro, e a EZ corte essa em duas em direção à reta [perpendicular], e por meio da EZ eleve o plano perpendicular em direção à ΓΔ; isto produzirá como seção no prisma um quadrado, e como seção no cilindro um círculo. Portanto, seja o quadrado MN a seção do prisma e do cilindro o círculo ΞΟΠΡ, e seja tocado o círculo aos lados do quadrado sobre os pontos Ξ, Ο, Π e Ρ; e seja a reta ΚΛ a seção comum do plano que cortou o segmento a partir do cilindro e do plano foi traçado por intermédio da EZ perpendicular em direção ao eixo do cilindro; e a ΠΘΞ corta essa em duas. E trace no semicírculo ΟΠΡ uma reta ΣΤ que seja perpendicular em direção à ΠΧ; e tendo sido levantado a partir da ΣΤ um plano perpendicular em direção à ΞΠ, seja prolongado sobre ambos (os lados) do plano em que está o círculo ΞΟΠΡ; isto produzirá como seção no semicírculo, em que base é o semicírculo ΟΠΡ e altura o eixo do prisma, um paralelogramo que terá um lado igual a ΣΤ e o outro igual ao lado do cilindro;[92] e também produzirá como seção no segmento cortado a partir do cilindro um paralelogramo em que o outro lado é igual a ΣΤ, e o outro igual à NY; e desse modo, seja a NY traçada no

90 Isto é, a figura cortada no cilindro é um sólido compreendido entre dois planos passando pelo eixo.

91 Refere-se à demonstração geométrica estabelecida na proposição XV.

92 Isto é, a denominação do segmento ΩΒ da superfície lateral do cilindro sobre o plano AB.

paralelogramo ΔΕ,[93] sendo paralela à ΒΩ, cortando a ΕΙ igual à ΠΧ. Já que o ΕΓ é um paralelogramo, e a ΝΙ paralela à ΘΓ, e as ΕΘ e ΓΒ estão sendo traçadas [por meio delas], então a ΕΘ está para ΘΙ como a ΩΓ está para ΓΝ, isto é, a ΒΩ está para ΥΝ (Euc., VI, 4). Mas a ΒΩ está para ΥΝ como o paralelogramo sendo gerado no semicírculo está para o [paralelogramo] sendo gerado no segmento que foi cortado a partir do cilindro, porque a ΣΤ (idem, VI, 1) é o mesmo lado de ambos paralelogramos; e a ΕΘ é igual a ΘΠ e a ΙΘ igual à ΧΘ; uma vez que a ΠΘ é igual à ΘΞ, então a ΘΞ está para ΘΧ como o paralelogramo sendo gerado no semicírculo está para o [paralelogramo] sendo gerado a partir do cilindro.[94]

Suponha o paralelogramo no segmento[95] sendo transportado e sendo jazido sobre o Ξ de modo que tenha o mesmo centro de gravidade o Ξ e, ainda, suponha a ΠΞ a alavanca e o mesmo ponto médio Θ; então, o paralelogramo no mesmo semicilindro, o mesmo estando fixo, está em equilíbrio acerca do ponto Θ ao paralelogramo sendo gerado no segmento a partir do cilindro, tendo sido deslocado e tendo sido colocado acerca do Ξ da alavanca de modo ser o mesmo centro de gravidade Ξ. E, visto que o Χ é o centro de gravidade do paralelogramo sendo gerado no semicilindro (Lema 6), e Ξ o centro de gravidade do paralelogramo sendo gerado no segmento [do cilindro] cortado e sendo transportado, e que o mesmo paralelogramo tem razão da ΞΘ para ΘΧ, em que o centro de gravidade dizemos ser o Χ, para o paralelogramo, em que o centro de gravidade dizemos ser o Ξ, portanto, o paralelogramo em que o centro de gravidade é o Χ estará em equilíbrio acerca do Θ ao paralelogramo em que o centro de gravidade o Ξ. E de modo semelhante é demonstrado também

93 O texto crítico registra ΔΕ, uma incorreção do palimpsesto; tal correção seria: “o paralelogramo ΔΩ ou Γ Β”.

94 Os dois paralelogramos tendo as bases comuns estão entre si como suas alturas, ou seja:
paralelogramo do semicírculo/paralelogramo do cilindro = ΩΒ/ΝΥ. Mas tem-se: ΩΒ/ΝΥ = ΩΓ/ΝΓ = ΕΘ/ΙΘ, e observando que ΕΘ = ΠΘ = ΘΞ e ΙΘ = ΧΘ, e conforme estabelecido no texto:
paralelogramo do semicírculo/paralelogramo do cilindro = ΘΞ/ΧΘ.

95 Subentendido do cilindro.

que quando é traçada no semicírculo ΟΠΡ qualquer outra [reta] perpendicular em direção a ΠΘ, e a partir da [reta] traçada, é levantado um plano perpendicular em direção a ΠΘ e é prolongado sobre cada um dos [lados] do plano em que está o círculo ΞΟΠΡ, [que] o paralelogramo sendo gerado no semicilindro, o mesmo estando fixo, que está em equilíbrio acerca do ponto Θ ao paralelogramo sendo gerado no segmento que foi cortado a partir do cilindro, tendo sido deslocado e tendo sido colocado sobre o Ξ da alavanca de modo que tenha o mesmo centro de gravidade Ξ. E portanto, todos os paralelogramos gerados no semicilindro, o mesmo estando fixo, estarão em equilíbrio acerca do ponto Θ a todos os paralelogramos gerados no segmento tendo sido cortado a partir do cilindro, sendo transportados e sendo jazidos sobre o ponto Ξ da alavanca; por conseguinte, também o semicilindro, o mesmo estando fixo, está em equilíbrio acerca do ponto Θ ao segmento tendo sido cortado tendo sido deslocado e tendo sido colocado acerca do Ξ da alavanca de modo que tenha o mesmo centro de gravidade Ξ.

## 13[96]

Seja, de novo, o paralelogramo MN[97] perpendicular em relação ao eixo e o círculo ΞΟΠΡ; sejam traçadas as ΘΜ e ΘΗ, e levante, com base nessas, os planos perpendiculares em direção ao plano em que está o semicírculo ΟΠΡ, e sejam levantados os citados planos para cima de cada uma das duas;[98] então, será um prisma tendo uma base de tal tamanho, o tamanho é o triângulo ΘΜΗ, e a altura igual ao eixo do cilindro, e esse prisma é a quarta parte do prisma inteiro envolvendo o cilindro (Euc., XI, 32). E sejam traçadas no semicírculo ΟΠΡ e

96 Sobre o segmento do cilindro.

97 O paralelogramo MN é um quadrado, o mesmo da proposição precedente, determinado por um plano cortando o prisma na metade de sua altura e perpendicular ao eixo. Além disso, a proposição XIII constitui uma continuação da proposição XII.

98 Isto é, sobre e sob o plano do semicírculo ΟΠΡ.

no quadrado MN algumas retas, KΛ e TY, estando a igual distância da ΠΞ; então, essas cortam a periferia do semicírculo OΠP sobre os pontos K e T, e o diâmetro sobre os ∑ e Z, e as ΘH e ΘM sobre os Φ e X, a partir das KΛ e TY levante os planos perpendiculares em direção à OP e seja prolongado para cima um dos dois em que está o círculo OΠP; então, um dos dois [planos] produzirá no semicilindro, em que a base é o semicírculo OΠP, e a altura a mesma do cilindro, como seção o paralelogramo, em que um dos lados é igual à K∑, e o outro igual ao eixo do cilindro, e, de modo semelhante, no prisma ΘHM um paralelogramo, em que um [dos lados] será igual à ΛX, e o outro igual ao eixo; e por causa dessas, será no mesmo semicilindro algum paralelogramo, em que um dos lados é igual à TZ, e o outro igual ao eixo do cilindro, e no prisma um paralelogramo, em que um dos lados é igual à YΘ, e o outro igual ao eixo do cilindro [...][99]

<Os centros de gravidade dos paralelogramos e situados sobre as ∑K e ZT são, respectivamente, os pontos médios das retas ∑K e ZT; o centro de gravidade de ambos é o ponto A, em que a reta que une os centros de gravidade de ambos os paralelogramos corta a ΘH (Lema 3). De modo semelhante, o centro de gravidade de ambos os paralelogramos juntos que se encontram colocados sobre as XΛ e YΦ é o ponto B, em que a reta que une os pontos médios das retas XΛ e YΦ corta a ΞΘ. Então, o paralelogramo sobre ΣK + paralelogramo sobre ZT/paralelogramo sobre XΛ + paralelogramo YΘ = ΣK/ΛK (Euc., VI, 1) = ΣK (idem, VI, 4; I, 33) /ΣP = ΣK (idem, V, 13) /ΣP x ΣK = ΣP x ΣO (idem, III, 31; VI, 7, 8, corolário ) /ΣP x ΣK = ΣO/ΣK = ΣP + 2ΣΘ/ΣK = ΛK + 2XΣ (idem, V, 4) /ΣK = 1/2ΛX + XΣ/1/2ΣK = B'Θ/A'Θ.

Assim, esses paralelogramos estão em equilíbrio entre si acerca do ponto Θ. O mesmo se aplica para todos os paralelogramos determinados de igual modo. Portanto, o semicírculo e o prisma HΘM,

---

99 A continuação da proposição XIII ausente no texto grego foi reconstituída no estilo de Arquimedes, por Heiberg.

que se enchem com tais paralelogramos, também estão em equilíbrio acerca do ponto Θ. Mas o semicilindro está em equilíbrio acerca do ponto Θ com o segmento do cilindro que foi transportado para Ξ (proposição XII), e a ΘΞ igual à ΠΘ; assim, o segmento colocado em Π se mantém em equilíbrio com o prisma HΘM. Além disso, o centro de gravidade do prisma encontra-se sobre a reta ΞΘ (Lema 9), cortada de modo que a parte situada para o Θ seja o dobro da restante (Lema 5). Assim, o segmento do cilindro está para o prisma HΘM como a que contém outro tanto e mais metade da ΞΘ está para a ΠΘ, isto é, igual ao que contém outro tanto e mais metade. Como o prisma HΘM é a quarta parte do prisma inteiro; por conseguinte, o segmento do cilindro é a sexta parte do mesmo.>

## 14[100]

Seja um prisma reto tendo por base quadrados, e seja uma das bases do mesmo o quadrado ΑΒΓΔ; e fique inscrito no prima o cilindro, e seja a base do cilindro o círculo EZHΘ, sendo tocado pelos lados do ΑΒΓΔ segundo os E, Z, H e Θ, e seja traçado um plano segundo o centro do mesmo [círculo] e pelo lado correspondente à ΓΔ no quadrado situado no plano oposto do ΑΒΓΔ; então, esse [plano] cortará a partir do prisma inteiro outro prisma que será a quarta parte do prisma inteiro, e esse mesmo estará sendo envolvido sob três paralelogramos e dois triângulos um oposto ao outro. Então, inscreva no semicírculo EZH uma seção de cone reto, e seja a ZK a parte do diâmetro situada na seção do cone reto; e no paralelogramo ΔH trace a MN, sendo paralela a KZ; então, essa cortará a circunferência do semicírculo sobre o Ξ, e a seção do cone sobre o Λ. Visto que isto é evidente,[101] o [retângulo] sob MN e NΛ é igual

100 Essa proposição é uma variante das demonstrações das proposições XII e XIII, sem utilizar o método mecânico.

101 Neste trecho, Arquimedes invoca uma relação cuja demonstração não se encontra em suas obras, mas que tinha provavelmente já sido demonstrada por seus predecessores. Em todo caso, Apolônio demonstra, posteriormente, nas

ao [quadrado] a partir da NZ; portanto (Euc., V, def. 9; VI, 17), a MN estará para a NΛ como o [quadrado] a partir da KH está para o [quadrado] a partir da ΛΣ.[102] E levante a partir da MN um plano perpendicular em direção a EH; então, o plano produzirá como seção no prisma que foi cortado a partir do prisma inteiro um triângulo retângulo, em que um (dos lados) com respeito ao ângulo reto será a MN e o outro no plano a partir da ΓΔ e sendo elevado perpendicular em relação a ΓΔ a partir do N, será igual ao eixo do cilindro, e estendendo a hipotenusa no mesmo plano secante; mas esse plano também produzirá como seção no segmento que foi cortado a partir do cilindro pelo plano que foi traçado por meio da EH e do lado do quadrado oposto a ΓΔ, um triângulo retângulo, em que um [dos lados] a cerca do/adjacente do ângulo reto será a MΞ, e o outro na superfície do cilindro e sendo elevado perpendicular em direção ao plano KN a partir do Ξ, e estendendo a hipotenusa no plano secante. Portanto, de modo semelhante, o [retângulo] sob MN e MΛ é igual ao [quadrado] a partir da MΞ; já que isto é evidente,[103] a MN estará para a MΔ como o [quadrado] a partir da MN está para o [quadrado] a partir da MΞ (idem, V, def. 9; VI, 17). Mas o [quadrado] a partir da MN está para o [quadrado] a partir da MΞ como o triângulo de base MN, sendo gerado no prisma, está para o triângulo de base MΞ determinado no segmento pela superfície do cilindro (idem, VI, 19); portanto, a MN está para MΛ como o [primeiro] triângulo está

---

*Cônicas*, Livro I, proposição II, que a razão KZ do círculo vale o dobro do parâmetro da parábola HZE inscrita no semicírculo. Então a equação da parábola $y^2 = 2px$ devem ser: $\Lambda\Sigma^2 = KZ \times \Sigma Z$ ou $NZ^2 = MN \times \Lambda N$.

Além disso, considerando que os quadrados das ordenadas são proporcionais as abscissas (*Sobre a quadratura da parábola,* prop. II), teria diretamente: $KH^2/\Lambda\Sigma^2 = KZ/\Sigma Z$, em que $\Lambda\Sigma^2 = KH^2 \times \Sigma Z/KZ = KH \times \Sigma Z$, uma vez que KH = KZ ou $NZ^2 = MN \times N\Lambda$.

102 Segundo as relações de Euc., XII, 10, pode-se estabelecer que: $MN^2/NZ = MN/N\Lambda$ ou $KH^2/\Lambda\Sigma^2 = MN/N\Lambda$.

103 Tem-se: $M\Xi^2 = MH \times ME = (HK - KM)(HK - KM) = HK^2 - KM^2 = MN^2 - NZ^2$. Portanto, conforme Euc., XII, 10, $NZ^2 = MN \times N\Lambda$; então: $M\Xi^2 = MN^2 - MN \times N\Lambda = MN(MN - N\Lambda) = MN \times M\Lambda$.

para o [segundo] triângulo.[104] E de modo semelhante, mostraremos também que, se no paralelogramo circunscrito acerca da seção [do cone reto], é traçada qualquer outra [reta] paralela a KZ, e a partir da [reta] que foi traçada levante um plano perpendicular em direção a EH, que o triângulo gerado no prisma estará para o triângulo produzido no segmento a partir do cilindro como a [reta] paralela a KZ, traçada no paralelogramo ΔH, está para a [reta] cortada pela seção do cone reto e do diâmetro EH. Portanto, preenchendo o paralelogramo ΔH por (retas) sendo conduzidas paralelas a KZ e o segmento sendo envolvido sob a seção do cone reto e o diâmetro pelas partes dessas retas sendo interceptadas pelo mesmo segmento [...][105]

[...] sendo conduzidas paralelas a KZ no paralelogramo ΔH, e todos os triângulos situados no prisma estarão para todos os triângulos situados no segmento cortado do cilindro como todas as retas situadas no paralelogramo ΔH estarão para todas as retas situadas entre a seção do cone reto e a reta EH. Ora, o prisma está composto de triângulos no prisma, e o segmento está composto de triângulos situados no segmento cortado a partir do cilindro, e o paralelogramo ΔH está composto das paralelas à KZ no paralelogramo ΔH, e a seção do cone reto está composta das retas situadas entre a seção do cone reto e a EH; logo, o prisma está para o segmento a partir do cilindro como o paralelogramo está para o segmento EZH envolvido pela seção do cone reto e a reta EH. Mas o paralelogramo ΔH é o que contém outro tanto e mais metade do segmento envolvido pela seção do cone reto e a reta EH; porque isto tem sido mostrado em publicações anteriores (*Sobre a quadratura da parábola*, prop. XXIV), logo, também o prisma é o que contém outro tanto e mais metade do segmento cortado

104 Os triângulos bases, um sobre MN no segmento do prisma, o outro sobre MΞ no segmento do cilindro, estão entre si como os quadrados dos lados homólogos, isto é:
triângulo da base MN/triângulo da base MΞ = $MN^2/M\Xi^2$, ou de acordo com a relação de *Sobre a medida do círculo*, prop. I, tem-se: triângulo da base MN/triângulo da base MΞ = MN/MΛ.

105 A lacuna no texto grego até o presente momento não pode ser completada, mas ausência dessa parte do raciocínio não altera o fim da demonstração.

a partir do cilindro;[106] portanto, o segmento do cilindro está para dois como o prisma está para três. Mas o prisma está para três como o prisma inteiro contendo o cilindro está para doze, e por ser um a quarta parte do outro; logo, o segmento do cilindro está para dois como o prisma inteiro está para doze; por conseguinte, o segmento cortado a partir do cilindro é a sexta parte do prisma.[107]

## 15[108]

Seja um prisma reto tendo por bases quadrados, que uma dessas bases seja o quadrado ΑΒΓΔ, e fique inscrito no prisma um cilindro, em que a base seja o círculo EZH; além disso, esse é tocado pelos lados do quadrado segundo os pontos E, Z, H e Θ;[109] e seja K o centro, e por intermédio do diâmetro EH e por um lado[110] do quadrado oposto correspondente a ΓΔ, seja traçado um plano; esse plano corta o prisma a partir do prisma inteiro e a partir do cilindro um segmento do cilindro.[111] Além disso, digo que é mostrado que esse segmento cortado a partir do cilindro pelo plano traçado é a sexta parte do prisma inteiro.

---

106 Tem-se, então: paralelogramo ΔH/segmento da parábola EZH = segmento do prisma/segmento do cilindro. Mas a proposição XXIV do Livro *Sobre a quadratura da parábola* estabelece que o segmento da parábola EZH = 4/3 triângulo inscrito EZH, e tem-se que paralelogramo ΔH = 2 triângulos EZH, conforme o texto ΔH = 3/2 segmento da parábola EZH; então, substituindo esse resultado na primeira relação, e em conformidade com o texto, tem-se: segmento do prisma = 3/2 segmento do cilindro.

107 A relação da nota precedente pode ser escrita como no texto: segmento do prisma/3 = segmento do cilindro/2. Mas o prisma inteiro = 4 segmentos do prisma, ou conforme o texto: prisma inteiro/12 = segmento do prisma/3; então: prisma inteiro/12 = segmento do cilindro/2, em que como no texto: segmento do cilindro = 1/6 do prisma inteiro.

108 Determinação mecânica.

109 Refere-se aos pontos da figura da proposição XIV.

110 Nessa parte do texto há uma lacuna que poderia ser reconstruída conforme a proposição precedente, visto que essa descreve a mesma figura, "do quadrado oposto correspondente a ΓΔ".

111 Isto é, um sólido compreendido entre dois planos.

E primeiramente, mostraremos que será possível inscrever no segmento cortado a partir do cilindro uma figura sólida e poderia circunscrever uma outra, sendo composta de prismas tendo igual altura e tendo bases triangulares semelhantes, de modo que a circunscrita supera a figura inscrita de uma grandeza menor do que toda grandeza dada [...][112]

<Com efeito, no semicírculo EZH, divida o diâmetro de um modo contínuo em duas partes iguais e pelos pontos da divisão trace retas paralelas à KZ, cortando a circunferência do semicírculo, e pelos pontos da interseção dessas retas com a circunferência trace as paralelas à EH, e prolongando por ambos os lados até que cortem as duas retas mais próximas paralelas à KZ; por umas e outras paralelas levante planos perpendiculares ao plano do semicírculo; então, esses planos determinarão no interior e no exterior do segmento do cilindro, prismas de mesma altura e tendo por bases triângulos opostos a retas paralelas à KZ. Continue a divisão da reta EH em duas partes iguais até que os dois prismas adjacentes à KZ sejam menores que uma grandeza dada (Euc., X, 1); então, o excesso da figura sólida circunscrita ao segmento do cilindro, composto de prismas, sobre a figura inscrita da mesma maneira será menor do que um volume que lhe é menor para a grandeza dada; o excesso é de fato igual à soma dos dois prismas adjacentes à KZ, uma vez que em todo os outros prismas a figura circunscrita corresponde aos prismas iguais à figura inscrita.

Além disso, trace no semicírculo uma seção de cone reto EZH, e sejam traçadas pelos pontos em que essa é cortada pelas retas paralelas à ZK outras paralelas à EH, e prolongando essas retas como temos indicado anteriormente, terá construído uma figura circunscrita ao segmento da seção do cone reto, e uma outra figura inscrita [sc. nesse segmento], as duas figuras estando compostas de paralelogramos e tais que o excesso da primeira sobre a segunda seja igual à soma dos

112 Nessa lacuna o texto está bem fragmentado, mas Heiberg tenta sanar essa falha mediante uma reconstrução das proposições XIX e XXV do tratado *Sobre os conoides e os esferoides.* Outras reconstruções têm seguido uma pauta similar com certas variantes, por exemplo, a versão estabelecida por Babini (1966), p.84.

dois paralelogramos adjacentes à ZK; além disso, cada um dos paralelogramos corresponderão a um dos prismas das figuras sólidas que temos indicado.

Então, se o segmento cortado do cilindro não é igual à sexta parte de todo prisma inteiro, será ou bem superior ou bem inferior a essa sexta parte. Suponhamos primeiro que possa ser maior. Nesse caso, o prisma cortado por um plano oblíquo é menor do que uma vez e meia o segmento do cilindro. Então, inscreve nesse segmento uma figura sólida e circunscreve outra do modo antes mencionado, tal que a figura circunscrita exceda a inscrita em uma grandeza dada. Posto que, segundo temos estabelecido (proposição XIV), as retas traçadas no paralelogramo ΔH estão para as retas interceptadas pela seção do cone reto e a reta EH como os triângulos do prisma cortado pelo plano oblíquo estão para os triângulos do segmento do cilindro, isto é, como os prismas contidos no prisma cortado pelo plano oblíquo estão para os prismas contidos na figura sólida inscrita, diminuídas de dois (Euc., XI, 32), e que a razão entre as retas indicadas é igual a razão que media entre os paralelogramos, os quais estão cortando o paralelogramo ΔH, e os paralelogramos contidos na figura inscrita na seção do cone reto, menos dois (idem., VI, 1), então, o prisma cortado pelo plano oblíquo estará para a figura inscrita na seção do cone reto. E como o prisma cortado pelo plano oblíquo é menor do que uma vez e meia o segmento do cilindro e esse excede a figura inscrita em uma grandeza menor do que qualquer grandeza dada,> o prisma cortado pelo plano será inferior a uma vez e mais metade da figura sólida inscrita no segmento a partir do cilindro. Mas foi demonstrado que o prisma cortado a partir do plano oblíquo está para a figura sólida inscrita no segmento a partir do cilindro como o paralelogramo ΔH está para os paralelogramos inscritos no segmento envolvido pela seção do cone reto e a reta EH; portanto, o paralelogramo ΔH é menor do que uma vez e mais metade [da soma] dos paralelogramos [contidos] no segmento envolvido pela seção do cone reto e a reta EH; o que é impossível, visto que foi mostrado em outro [lugar] (*Sobre a quadratura da parábola,* prop. XXIV) que o paralelogramo ΔH é igual a uma vez e mais metade do segmento

envolvido pela seção do cone reto e a reta EH. Portanto, o segmento do cilindro não é maior do que a sexta parte do prisma inteiro.

<[113] Assim, suponhamos que possa ser menor. Então, o prisma cortado pelo plano oblíquo é menor do que uma vez e mais metade do segmento do cilindro. Circunscreve de novo [ao segmento do cilindro] uma figura sólida e inscreve outra, segundo o que foi citado antes. Demonstraremos igualmente que os prismas contidos no prisma cortado pelo plano oblíquo estão para os prismas da figura circunscrita em torno ao segmento do cilindro como os paralelogramos envolvidos no paralelogramo ΔH estão para os paralelogramos da figura circunscrita em torno ao segmento envolvido entre a seção do cone reto e a reta EH. Em consequência,> a razão [da soma de] todos os prismas [contidos] no prisma cortado pelo plano oblíquo para [a soma de] todos os prismas contidos na figura circunscrita ao segmento cortado do cilindro é igual à razão da [soma de] todos os paralelogramos [envolvidos] no paralelogramo ΔH para [a soma de] todos os paralelogramos da figura circunscrita acerca do segmento envolvido pela seção do cone reto e da reta EH, isto é, a razão do prisma cortado pelo plano oblíquo em direção à figura circunscrita acerca do segmento do cilindro será igual à razão do paralelogramo ΔH para a figura circunscrita acerca do segmento envolvido pela seção do cone reto e da reta EH. Mas o prisma cortado pelo plano oblíquo é maior do que uma vez e mais metade da figura sólida acerca do segmento do cilindro; <então, o paralelogramo ΔH também é maior do que uma vez e mais metade da figura circunscrita ao segmento compreendido entre a seção do cone reto e a reta EH, o que é impossível, já que foi demonstrado que o paralelogramo ΔH é justamente uma vez e mais metade que o segmento compreendido entre a seção do cone reto e a reta EH. Por conseguinte, o segmento do cilindro não é tampouco menor do que a sexta parte do prisma inteiro; não sendo também nem maior e nem menor, é igual à sexta parte do prisma, o que era necessário demonstrar.>

---

113 Nova lacuna, mas Heiberg oferece uma reconstrução abreviada da argumentação fragmentada, bastante prolixa, de Arquimedes.

# Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

ARQUIMEDES. *La Méthode*, t. III. C. Mugler (Ed.). Paris: Belles Lettres, 1971. (Original grego).

BABINI, J. *El "Método"*. Buenos Aires: Eudeba, 1966.

BARKER, S. F. *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1969.

BERVIAN, P. A.; CERVO, A. L. *Metodologia científica*. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1983.

BESSELAAR, J. V. D. *Introdução aos estudos históricos*. 3.ed. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária, 1973.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: E. Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática*. Brasília: SEF/MEC, 1998.

______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: Semtec/MEC, 2002.

BUENO, S. *Estudos de filologia portuguesa*. São Paulo: Saraiva, 1946.

CHARLES, M. *Aperçu Historique Sur L'Origine Et Le Développement Des Méthodes En Géométrie*. Paris: Gauthier-Villars, 1875.

COLLINGWOOD, R. G. *A Ideia de Historia*. 6.ed. Lisboa: Presença, 1986.

DEL GRANDE, J. The Method of Archimedes. *The Mathematics Teacher*, v.86, n.3, p.240-3, 1993.

DESCARTES, R. *Oeuvres de Descartes*. Ch. Adam & P. Tannery (Ed.). Paris: Vrin/CNRS, 1964-76.

______. *Règles pour la direction de l'esprit*. Trad. J. Sirven. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1908. (Tradução de *Regulae ad directionem ingenii*).

EUCLIDES. *Os elementos / Euclides*. Trad. e introd. Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

FERREIRA, A. B. de H. *Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira, 1997.

FROST, S. E. *Ensinamentos básicos dos grandes filósofos*. São Paulo: Cultrix, 1985.

KARLSON, P. *A magia dos números*. Porto Alegre: Globo, 1961.

LALANDE, A. *Vocabulário técnico crítico da filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 1996.

MATES, B. *Lógica elementar*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.

MAY, K. O. *Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics.* 2.ed. Toronto: University of Toronto Press, 1978.

MICHEL, P. H. *De Pythagore a Euclide – Contribution a L' Histoire Des Mathématiques Préeuclidiennes.* Paris: Les Belles Lettres, 1950.

MUGLER, C. (Ed.). Prefácio. In: ARQUIMEDES. *La Méthode*, t. III. Paris: Belles Lettres, 1971.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). *Pesquisa em educação matemática:* concepções & perspectivas. São Paulo: Editora da Unesp, 1999.

PAPPUS, A. *La Collection Mathématique.* 2v. Trad. P. ver Eecke. Paris: Albert Blanchard, 1982.

POINCARÉ, H. *O valor da Ciência*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1995.

POLYA, G. *How to Solve It*. 2.ed. New York: Doubleday, 1957.

______. *Mathematics and Plausible Reasoning.* New Jersey: Princeton University Press, 1973a.

______. *Patterns of Plausible Inference.* New Jersey: Princeton University Press, 1973b.

______. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

PUCHKIN, V. N. *Heurística: a ciência do pensamento criador*. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1976.

RIBNIKOV, K. *Historia de las Matemáticas*. Moscou: Mir, 1987.

RUSSELL, B. *História da Filosofia ocidental*. 3v. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1969.

______. *Misticismo e Lógica*. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1977.

SALMON, W. C. *Lógica*. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1971.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de Matemática: 1º grau*. São Paulo: SE/CENP, 1986.

SCIACCA, M. F. *História da Filosofia*. 3v. São Paulo: Mestre Jou, 1967.

STRUIK, D. J. *História concisa das Matemáticas.* Lisboa: Gradiva, 1992.

TANNERY, P. *Géométrie Grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons*. Paris: Gauthier-Villars, 1887.

THURSTON, W. P. Sobre prova e progresso em Matemática. *Matemática universitária*, SBM, Rio de Janeiro, v. 17, p. 2-21, 1994.

VER EECKE, P. Notas. In: ARQUIMÉDE. *Les Oeuvres completes D'Archiméde.* Trad. P. ver Eecke. Paris: Desclée, De Brouwer & Cie, 1921.

VER EECKE, P. Prefácio. In: PAPPUS, A. *La Collection Mathématique.* 2v. Trad. Trad. P. ver Eecke. Paris: Albert Blanchard, 1982.

VERA, F. *Científicos griegos.* 2v. Madrid: Aguilar, 1970.

ZEUTHEN, H. G. *Histoire des Mathématiques dans L'Antiquité et Le Moyen Age.* Paris: Gauthier-Villars, 1902.

Este livro discute os indícios heurísticos presentes nas obras *O método*, do pensador grego Arquimedes de Siracusa (287 a.C-212 a.C.); *A coleção matemática*, do matemático helenístico Pappus de Alexandria (c.290-c.350 d.C.); e *Regras para a direção do espírito*, do filósofo francês René Descartes (1596-1650). A partir dessa discussão, o Balieiro Filho estabelece relações com a sistematização da atividade heurística apresentada nas obras *A arte de resolver problemas* e *Matemática e raciocínio plausível*, do matemático húngaro George Polya (1887-1985).

A atividade heurística – definida como esquema psíquico por meio do qual o homem cria, elabora e descobre a resolução de um problema – é o eixo central dos estudos sobre como pensamos, estabelecidos por Polya e que fundamentam a Resolução de Problemas, linha de pesquisa em Educação Matemática.

Este livro também traz a primeira tradução em português, feita pelo autor, a partir do original em grego clássico, da obra *O método*, de Arquimedes, a mais antiga obra de heurística de que se tem conhecimento.

*Inocêncio Fernandes Balieiro Filho* é graduado (1995) em Matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), com mestrado (1999) e doutorado (2004) em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp), *campus* de Rio Claro. Atualmente é professor assistente doutor no Departamento de Matemática da Unesp, *campus* de Ilha Solteira. Faz parte do corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino e Processos Formativos da Unesp. Atua na área de Educação Matemática, dedicando-se a pesquisas com ênfase em História da Matemática, Filosofia da Matemática e Fundamentos da Matemática.